

الأدهم
فى
التفاضل والتكامل
الصف الثالث الثانوى
عام وأزهر
www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة
هدية مجانية
إعداد أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

الوحدة الأولى

الدرس الأول
إشتقاق الدوال المثلثية



(١) جا²هـ + جتا²هـ = ١

(٢) ١ + ظا²هـ = قا²هـ

(٣) ١ + ظتا²هـ = قتا²هـ

(٤) قاعدة الجيب

$$\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}} = \text{٢نق}$$

(٥) قاعدة جيب التمام

أ² = ب² + جـ² - ٢ ب جـ جتا أ

وهكذا

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2 - \text{أ}^2}{\text{٢ ب جـ}}$$

(٦) جا (أ ± ب) = جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب

(٧) جتا (أ ± ب) = جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب

(٨)

$$\text{ظا (أ + ب)} = \frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}}$$

(٩) جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ

(١٠) جتا ٢أ = جتا² أ - جا² أ

= ٢ جتا² أ - ١

= ١ - ٢ جا² أ

(١١)

$$\text{ظا ٢أ} = \frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ - ظا}^2\text{ أ}}$$

(١٢) قواعد الاشتقاق

مشتقة حاصل ضرب دالتين

الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

(١٣) مشتقة خارج قسمة دالتين

$$\frac{\text{المقام × مشتقة البسط - البسط × مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

(١٤) مشتقة الجذر التربيعي

$$= \frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{2\sqrt{\quad}}$$

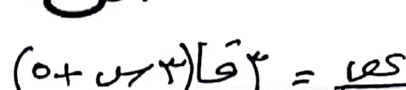
(١٥) مشتقة (القوس)^{ن}

= ن (القوس)$^{ن-1}$ × مشتقة ما داخل القوس

(١٦) قاعدة السلسلة

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

الدالة	مشتقتها
جا س	جتا س
جتا س	− جا س
ظا س	قا² س
ظتا س	− قتا² س
قا س	قا س ظا س
قتا س	− قتا س ظتا س



① ص = قا(٣س + ٥)

الحل

$\frac{dص}{dس}$ = ٣ قا(٣س + ٥) ظا(٣س + ٥)

② ص = ظتا³ ٦س

الحل

هنعتبر دى قوس ودالة و زاوية

= ٣ ظتا² ٦س × (− قتا² ٦س) × ٦

= − ١٨ ظتا² ٦س قتا² ٦س

③ إذا كانت ص = $\sqrt{٥ - ٢ع}$ ، ع = قا ٢س

اثبت أن $\sqrt{٣}\ \frac{dص}{dس} + ١٢ =$ ٠

عند س = $\frac{\pi}{٦}$

الحل

$\frac{dص}{dع} = \frac{-٢}{٢\sqrt{٥-٢ع}} = \frac{-١}{\sqrt{٥-٢ع}}$

$\frac{dع}{dس}$ = ٢ قا ٢س ظا ٢س

عند س = $\frac{\pi}{٦}$ = ٣٠°

∴ ع = $\frac{١}{\text{جتا } ٦٠°}$ = ٢

∴ $\frac{dص}{dس} = \frac{dص}{dع} \times \frac{dع}{dس}$

= $\frac{-١}{\sqrt{٥-٢ع}}$ × ٢ قا ٢س ظا ٢س

$\left[\frac{dص}{dس}\right]_{س=٣٠°،\ ع=٢} = \frac{-١}{\sqrt{٥-٤}}$ × ٢ × $\frac{١}{\text{جتا } ٦٠°}$ × ظا ٦٠°

= − ٤ $\sqrt{٣}$

∴ الطرف الأيمن = $\sqrt{٣}$ × − ٤ $\sqrt{٣}$ + ١٢ = صفر

= الأيسر #

لاحظ

$\lim_{س \to هـ} \frac{د(س) - د(هـ)}{س - هـ}$ = د'(هـ)

لذلك $\lim_{س \to هـ} \frac{\text{جا}(س) - \text{جا}(هـ)}{س - هـ}$ = جتا هـ

$= \frac{\text{-٦س قتا}^{٢}\text{ ٣س - ٩ قتا}^{٢}\text{ ٣س - ٢ ظتا ٣س}}{(\text{٢س+٣})^{٢}}$

أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما

---

④ $\text{ص} = \text{س}^{٣}\text{ قتا س}$

الحل

($\text{٣س}^{٢}$) ، (-قتا س ظتا س)

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣س}^{٢}\text{ قتا س - س}^{٣}\text{ قتا س ظتا س}$

لاحظ

$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{١}{\text{س}}\right) = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$

---

⑤ $\text{ص} = \text{س}^{٢}\text{ قا}\frac{١}{\text{س}}$

الحل

(٢س) ، $\left(\text{قا}\frac{١}{\text{س}}\text{ ظا}\frac{١}{\text{س}}\right)\left(\frac{-١}{\text{س}^{٢}}\right)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س قا}\frac{١}{\text{س}} + \text{س}^{٢}\text{ قا}\frac{١}{\text{س}}\text{ ظا}\frac{١}{\text{س}} \times \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$

$= \text{٢س قا}\frac{١}{\text{س}} - \text{قا}\frac{١}{\text{س}}\text{ ظا}\frac{١}{\text{س}}$

---

⑥ $\text{ص} = \frac{\text{ظتا ٣س}}{\text{٢س + ٣}}$

الحل

($\text{ظتا ٣س} \leftarrow \text{-٣ قتا}^{٢}\text{ ٣س}$) ، ($\text{٢س+٣} \leftarrow ٢$)

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{٢س+٣})(\text{-٣ قتا}^{٢}\text{ ٣س}) - (\text{ظتا ٣س})\,٢}{(\text{٢س + ٣})^{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{-٣ قتا}^{٢}\text{ ٣س})(\text{٢س+٣}) - \text{٢ ظتا ٣س}}{(\text{٢س+٣})^{٢}}$

---

⑦ $\text{ص} = \text{جا}^{٢}\text{ ٥س + جتا}^{٢}\text{ ٥س}$

الحل

$\text{ص} = ١$ لأن $\text{جا}^{٢}\text{ س + جتا}^{٢}\text{ س} = ١$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$

---

⑧ $\text{ص} = \text{٢ جا س جتا س}$

الحل

لاحظ أن $\text{جا ٢س} = \text{٢ جا س جتا س}$

$\therefore \text{ص} = \text{جا ٢س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢ جتا ٢س}$

---

⑨ $\text{ص} = \text{جتا}^{٢}\text{ س - جا}^{٢}\text{ س}$

الحل

$\text{ص} = \text{جتا ٢س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{-٢ جا ٢س}$

---

⑩ $\text{ص} = \text{١ + ظا}^{٢}\text{ س}$

الحل

$\text{ص} = \text{قا}^{٢}\text{ س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢ قا س} \quad \text{قا س ظا س} \quad \times ١$

قوس × داله × زاوية

$= \text{٢ قا}^{٢}\text{ س ظا س}$

الدرس الثالث
الاشتقاق الضمني والبارامتري



$\frac{d}{dس} س^{5} = 5س^{4}$

$\frac{d}{dس} ص^{5} = 5ص^{4} \frac{dص}{dس}$

أوجد $\frac{dص}{dس}$ لكل مما يأتي

---

(١) $س^{2}ص + ص^{2}س = 25$

الحل

بالاشتقاق بالنسبة لـ (س)

$2سص + س^{2}\frac{dص}{dس} + ص^{2} + 2صس\frac{dص}{dس} = 0$

$\frac{dص}{dس}(س^{2} + 2سص) = -2سص - ص^{2}$

$\therefore \frac{dص}{dس} = \frac{-2سص - ص^{2}}{س^{2} + 2سص}$

---

(٢) جا ٢ص = ص جتا ٢س

بالاشتقاق بالنسبة س

الحل

$2 جتا 2ص \frac{dص}{dس} = -2(جا 2س)ص + جتا 2س \frac{dص}{dس}$

$\frac{dص}{dس}(2 جتا 2ص - جتا 2س) = -2 ص جا 2س$

$\therefore \frac{dص}{dس} = \frac{-2 ص جا 2س}{2 جتا 2ص - جتا 2س}$

---

(٣) $س = 5ن + 3$ ، $ص = 16ن^{2} + 9$ عند ن = ٥

الحل

$\frac{dس}{dن} = 5$ ، $\frac{dص}{dن} = 32ن$

$\frac{dص}{dس} = \frac{dص}{dن} \div \frac{dس}{dن} = \frac{32ن}{5} = \frac{32 \times 5}{5}$

$= 32$

---

(٤) $س = 5 + قا^{2} 3\theta$ ، $ص = 1 - ظتا 3\theta$ ، $\theta = \frac{\pi}{4} = 45°$

الحل

$\frac{dص}{d\theta} = -3 قتا^{2} 3\theta = \Leftarrow$

$\frac{dس}{d\theta} = 2 قا 3\theta . قا 3\theta ظا 3\theta \times 3$

$= 6 قا^{2} 3\theta ظا 3\theta$

عند $\theta = \frac{\pi}{4} = 45°$ $\therefore \frac{dص}{d\theta} = \frac{-3}{(جا 135)^{2}} = -6$

$\frac{dس}{d\theta} = 6 \times \frac{1}{(جتا 135)^{2}} \times ظا 135 = -12$

$\therefore \frac{dص}{dس} = \frac{dص}{d\theta} \div \frac{dس}{d\theta}$

$= \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$

---

(٥) أوجد مشتقة (س − جاس) بالنسبة إلى (١ − جتاس) عندما $س = \frac{\pi}{3}$

الحل

الأولى هي ص والثانية ع

$\therefore ص = س - جاس$

$ع = 1 - جتاس$

$\frac{دص}{دس} = ١ - جتاس$

$\frac{دع}{دس} = جاس$

عند $س = \frac{\pi}{٣} = ٦٠^\circ$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{دع}{دس} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore \frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \div \frac{دع}{دس} = \frac{١}{٢} \div \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

---

(٦) أوجد قيمة البارامتر ع التي يكون عندها للمنحنى

$س = ٢ع^٣ - ٥ع^٢ - ٤ع + ١٢$

، $ص = ٢ع^٢ + ع - ٤$

(أ) مماس أفقي (ب) مماس رأسي

الحل

* الفكرة مماس أفقي يعني الميل = صفر
  حيث نساوي البسط بالصفر
* ومماس رأسي يعني غير معرف المقام = صفر

$\frac{دص}{دع} = ٤ع + ١$

$\frac{دس}{دع} = ٦ع^٢ - ١٠ع - ٤$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \div \frac{دس}{دع} = \frac{٤ع + ١}{٦ع^٢ - ١٠ع - ٤}$

(أ) في المماس الأفقي

بوضع $٤ع + ١ = ٠$

$\therefore ع = \frac{-١}{٤}$

(ب) في المماس الرأسي بوضع $٦ع^٢ - ١٠ع - ٤ = ٠$

$\therefore ع = \frac{-١}{٣}$ ، $ع = ٢$

---

(٧) إذا كان $س^٣ ص^٢ = ١$ فإن

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{ص=١} = \dots\dots$

الحل

عند $ص = ١$ $\therefore س = ١$

بالاشتقاق بالنسبة (س)

$٣س^٢ ص^٢ + ٢س^٣ ص \frac{دص}{دس} = ٠$

بالتعويض

$٣ + ٢ \frac{دص}{دس} = ٠$

$\therefore ٢ \frac{دص}{دس} = -٣$

$\therefore \left[\frac{دص}{دس}\right]_{ص=١} = \frac{-٣}{٢}$

رب اجعلها سنة سعيدة على الجميع
ووفق كل طلابنا الغاليين

الدرس الثالث
المشتقات العليا للدالة

لاحظ

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} \neq \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2$$

المشتقة الثانية ≠ تربيع المشتقة الأولى

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right) = \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$$

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{دس}^3}\right) = \frac{\text{د}^4\text{ص}}{\text{دس}^4} = \text{ص}''''$$



(١) إذا كانت د(س) = جا ٢س فإن $\text{د}''(\frac{\pi}{4})$ = ...

الحل

$\text{د}' = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢ جتا ٢س

$\text{د}''$ = −٤ جا ٢س

$\text{د}''(\frac{\pi}{4})$ = −٤ × جا ٩٠ = −٤

(٢) إذا كانت ص = −جا س فإن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ + ص = ...

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = −جتا س

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ = −(−جا س) = جا س

∴ $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ + ص = جا س − جا س = صفر

(٣) إذا كانت $\text{د}'$(س) = س د(س) ، د(٣) = −٥ فإن $\text{د}''$(٣) = ...

(−٥٠) ، −٤٠ ، ١٥ ، ٢٧

التوضيح

∵ $\text{د}'$(س) = س د(س)

$\text{د}''$(س) = س $\text{د}'$(س) + د(س)

د(٣) = −٥ ، $\text{د}'$(٣) = ٣ × −٥ = −١٥

بالتعويض

$\text{د}''$(٣) = ٣ × −١٥ − ٥ = −٥٠

(٤) إذا كانت د(س) = ظتا س فإن $\text{د}''(\frac{\pi}{4})$ = ...

$\frac{-4}{9}$ ، $\frac{4}{9}$ ، (٤) ، $\frac{9}{2}$

(٥) إذا كانت د(س) = جا ٢س جتا ٢س فإن $\text{د}''(\frac{\pi}{3})$ = ...

−٤ ، صفر ، ($4\sqrt{3}$) ، ٨

لاحظ جا ٢س جتا ٢س = $\frac{1}{2}$ جا ٤س

ص' = ٢ جتا ٤س ، ص'' = −٨ جا ٤س

−٨ × جا ٢٤٠ = $4\sqrt{3}$

(٦) إذا كانت $\text{ص} = \text{ظا س}$

اثبت أن $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 2\text{ص}(1+\text{ص}^2)$

الحل

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^2\text{س}$

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 2\text{قاس} \cdot \text{قاس ظاس}$

$= 2\text{قا}^2\text{س ظاس} \leftarrow (1)$

المقدار $2\text{ص}(1+\text{ص}^2) =$

$2\text{ظاس}(1+\text{ظا}^2\text{س})$

$= 2\text{ظاس} \times \text{قا}^2\text{س} \leftarrow (2)$

$\therefore \frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 2\text{ص}(1+\text{ص}^2)$ #.

---

(٧) إذا كانت $\text{ص} = \sqrt{2\text{س}+5}$

اثبت أن

$(2\text{س}+5)\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3} + 3\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 0$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{2}{2\sqrt{2\text{س}+5}} = (2\text{س}+5)^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = -\frac{1}{2} \times (2\text{س}+5)^{-\frac{3}{2}} \times 2$

$= -(2\text{س}+5)^{-\frac{3}{2}}$

$\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3} = \frac{3}{2}(2\text{س}+5)^{-\frac{5}{2}} \times 2$

$= 3(2\text{س}+5)^{-\frac{5}{2}}$

الطرف الأيمن $= (2\text{س}+5)\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3} + 3\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$

$= (2\text{س}+5) \times 3(2\text{س}+5)^{-\frac{5}{2}} - 3(2\text{س}+5)^{-\frac{3}{2}}$

$= 3(2\text{س}+5)^{-\frac{3}{2}} - 3(2\text{س}+5)^{-\frac{3}{2}} =$ صفر #

---

(٨) إذا كانت: $\text{س} = 2\text{ن}^3 + 3$

، $\text{ص} = \text{ن}^4$

أوجد $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ عند $\text{ن} = 1$

كتير شوية

الحل

$\text{س} = 2\text{ن}^3 + 3$ ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = 6\text{ن}^2$

$\text{ص} = \text{ن}^4$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = 4\text{ن}^3$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{4\text{ن}^3}{6\text{ن}^2} = \frac{2}{3}\text{ن}$

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = \frac{2}{3} \times \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6\text{ن}^2}$

$= \frac{1}{9\text{ن}^2}$

$\left[\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}\right]_{\text{ن}=1} = \frac{1}{9}$

دور أول (٢٠٠٣) دفعة العظماء

(٩) إذا كانت: $٢\,س\,ص + ٣ = ٥\,س^{٢}$

فاثبت أنه $س\left(\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}\right) + ٢\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = ٥$

الحل

بالاشتقاق بالنسبة لـ (س)

$\therefore ٢\left(س\,\frac{ءص}{ءس} + ص\right) = ١٠\,س$

وكمان مرة علشان الحبايب

$٢\left[س\,\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + \frac{ءص}{ءس} + \frac{ءص}{ءس}\right] = ١٠$ ÷ ٢

$س\left(\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}\right) + ٢\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = ٥$ #

---

(١٠) إذا كانت: $س^{٣}\,ص^{٣} = ١$

فاثبت أنه $س^{٢}\,\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٢\,ص$

الحل

$\because س^{٣}\,ص^{٣} = ١$ بأخذ $\sqrt[٣]{\ }$ للطرفين

$\therefore س\,ص = ١$ بالاشتقاق لـ س

$س\,\frac{ءص}{ءس} + ص = ٠$

$س\,\frac{ءص}{ءس} = -ص$ ← (١)

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص}{س}$

نرجع للمعادلة (١) بالاشتقاق

$س\,\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + \frac{ءص}{ءس} + \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$س\,\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٢\,\frac{ءص}{ءس} = ٠$

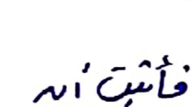
$س\,\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = -٢\,\frac{ءص}{ءس}$

$س\,\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{٢\,ص}{س}$

$\therefore س^{٢}\,\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٢\,ص$ #

---

(١١) إذا كان $س\,ص = جا\,س\,جتا\,س$



فأثبت أنه

$س\,ص'' + ٢\,ص' + ٤\,س\,ص = ٠$

الحل

$س\,ص = \frac{١}{٢}\,جا\,٢س$ بالاشتقاق (س)

$س\,ص' + ص = \frac{١}{٢} \times ٢\,جتا\,٢س$

$س\,ص' + ص = جتا\,٢س$ وكمان مرة

$س\,ص'' + ص' + ص' = -٢\,جا\,٢س$

$س\,ص'' + ٢\,ص' + ٢\,جا\,٢س = ٠$

$\because ٢\,جا\,٢س = ٤\left[\frac{١}{٢}\,جا\,٢س\right] = ٤\,س\,ص$

$\therefore س\,ص'' + ٢\,ص' + ٤\,س\,ص = ٠$ #

(١٢) أكمل

$$\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} = \dots$$

ده قانون معدل التغير [للمشتقة الأولى]

$= د'(س)$

---

(١٣) إذا كان ص = جتاس فإن

$$\frac{د^{٢٠١٨} ص}{د س^{٢٠١٨}} = \dots$$

(أ) جتاس (ب) −جتاس

(ج) جاس (د) −جاس

الحل

∵ ص = جتاس

ص′ = −جاس

ص″ = −جتاس

ص‴ = جاس

ص^(٤) = جتاس ومنها ص^(ن٤) = ص = جتاس

∴ ص^(٢٠١٦) = جتاس

ص^(٢٠١٧) = −جاس

ص^(٢٠١٨) = −جتاس

أكثروا من الاستغفار
وأكثروا من ذكر الله
ولا تنسوا دعوة لمن علمكم

من أسئلة مكتب مستشار الرياضيات



تذكر قوانين ايجاد الميل

* $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ ← $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$

* ص = م س + جـ
  إذا كانت ص لوحدها في طرف فإن
  الميل هو معامل س

* أ س + ب ص + جـ = ٠
  الميل = $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

* م = ظا هـ ← الزاوية مع الاتجاه الموجب
  لمحور السينات

* م = $\frac{دص}{دس}$ عند نقطة التماس

* إذا كان ل١ // ل٢ فإن م١ = م٢

* ل١ ⊥ ل٢ فإن م١ × م٢ = −١

* المعادلة $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ = الميل

* تذكر أن نقطة التماس تحقق معادلة
* المنحنى والمماس وعندها الميل = $\frac{دص}{دس}$

* لإيجاد المعادلة نحتاج إلى
  نقطة وميل

* لإيجاد نقطة التماس نحل المعادلتين



(١) أوجد معادلة المماس والعمودي على
س² + ص² = ٥٢ عند (٤، −٦)

الحل

٢س + ٢ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠

٢ص $\frac{دص}{دس}$ = −٢س

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-٢س}{٢ص} = \frac{-س}{ص}$

∴ ميل المماس = $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{(٤،-٦)} = \frac{-٤}{-٦} = \frac{٢}{٣}$

معادلة المماس: $\frac{ص + ٦}{س - ٤} = \frac{٢}{٣}$

٢س − ٨ = ٣ص + ١٨

٢س − ٣ص − ٢٦ = ٠

معادلة العمودى $\frac{ص + ٦}{س - ٤} = \frac{-٣}{٢}$

$٢ص + ١٢ = -٣س + ١٢$

$٢ص + ٣س = ٠$

لاحظ علشان تجيب ميل العمودى نتقلب الميل وتغير الإشارة

---

② إذا كانت معادلة العمودى للمنحنى $ص = د(س)$ عند $(١ ، ١)$ هى $س + ٤ص = ٥$ فإن $د'(١) = ...$

-٣ ، $\frac{١}{٤}$ ، **٤** ، -٤

الحل

ميل العمودى $= \frac{-١}{٤}$ لأنه دى معادلة العمودى

$\therefore$ ميل المماس $= ٤$

$\therefore د'(١) = ٤$

---

③ المماس للمنحنى $ص = ٣س^٢ - ٥$ عند النقطة $(١ ، -٢)$ يمر بالنقطة

أ) $(٥ ، -٢)$ ب) $(٣ ، ١)$

ج) $(٢ ، -٤)$ **د) $(٠ ، -٨)$** ✓

$\frac{دص}{دس} = ٦س$ الميل $= \left[\frac{دص}{دس}\right]_{س=١} = ٦$

المعادلة $\frac{ص + ٢}{س - ١} = ٦$

$٦س - ٦ = ص + ٢$

$٦س - ص - ٨ = ٠$

هنعوض بكل نقطة فى معادلة المماس الوحيدة اللى تحققها $(٠ ، -٨)$

$٦ \times ٠ - (-٨) - ٨ = ٠ + ٨ - ٨ = ٠$ تحقق

---

④ العمودى للدائرة $س^٢ + ص^٢ = ١٢$ عند أى نقطة عليها يمر بالنقطة ...

أ) $(٢ ، ٢)$ ب) $(١ ، ١)$

ج) $(٠ ، ٠)$ ✓ د) $(-٢ ، -٢)$

الحل

وكل بالك دى دائرة مركزها $(٠ ، ٠)$ صح؟

العمودى بيكون عمودى على المماس كده تمام؟

فيبقى ماهو نصف القطر عمودى على المماس.

وكل نصف قطر هيمر بالمركز $(٠ ، ٠)$

---

⑤ إذا كان المماس للمنحنى $ص^٢ = ٤أس$ عمودى على محور السينات فإن

أ) $\frac{دص}{دس} = ٠$ ب) $\frac{دص}{دس} = ١$

ج) $\frac{دص}{دس} = -١$ **د) $\frac{دس}{دص} = ٠$** ✓

الحل

عمودى على محور السينات = موازى لمحور الصادات

$\therefore \frac{دص}{دس}$ غير معرف $= \frac{عدد}{صفر}$

$\therefore \frac{دس}{دص} = صفر$

⑥ اثبت أن المنحنيين

$(س-١)^٢ + ص^٢ = ٢$ ← ①

، $(س+١)^٢ + ص^٢ = ٢$ ← ②

يتقاطعان على التعامد، ثم أوجد معادلات المماسات لهما عند نقط التقاطع

الحل

* لإيجاد نقط التقاطع نحل المعادلتين معاً

من ①، ② ∴ $(س-١)^٢ = (س+١)^٢$

∴ $س-١ = ±(س+١)$

$س-١ = س+١$ مرفوض ، $س-١ = -س-١$

$٢س = -١+١$

∴ $٢س = ٠$

∴ $س = ٠$

* بالتعويض في ①

$١ + ص^٢ = ٢$

$ص^٢ = ١$ ∴ $ص = ±١$

∴ نقط التقاطع هي (٠، ١)، (٠، -١)

* باشتقاق المنحنى الأول

$٢(س-١) + ٢ص ص' = ٠$

∴ $ص' = \frac{-٢(س-١)}{٢ص} = \frac{-س+١}{ص} = م_١$

* باشتقاق المنحنى الثاني

$٢(س+١) + ٢ص ص' = ٠$

$ص' = \frac{-٢(س+١)}{٢ص} = \frac{-س-١}{ص} = م_٢$

* عند (٠، ١)

$م_١ = ١$ ، $م_٢ = -١$

∴ المماسان متعامدان

معادلة المماس الأول

$ص - ١ = ١(س-٠)$

∴ $ص - س - ١ = ٠$ ← (١)

معادلة المماس الثاني

$ص - ١ = -(س-٠)$

$ص + س - ١ = ٠$ ← (٢)

* عند (٠، -١)

∴ $م_١ = -١$ ، $م_٢ = ١$ متعامدان

معادلة المماس الأول

$(ص+١) = -١(س-٠)$

$ص + س + ١ = ٠$ ← (٣)

معادلة المماس الثاني

$(ص+١) = ١(س)$

$ص - س + ١ = ٠$ ← (٤)

كبيرة شوية بس لما تعرف ترتيب الخطوات هتبقى سهلة

(٧) أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودي عليه للمنحنى:
$٣ س^٢ + ص^٢ = ١٢$ عند $(-١ ، ٣)$

الحل

بالاشتقاق بالنسبة لـ (س)

$٦ س + ٢ ص ص' = ٠$

$\therefore ص' = \frac{-٦ س}{٢ ص}$

$\therefore$ الميل $= \frac{ءص}{ءس}]_{(-١ ، ٣)} = \frac{-٦ \times -١}{٢ \times ٣} = ١$

* معادلة المماس $(ص - ٣) = ١ (س + ١)$

$ص = س + ١ + ٣$

$ص = س + ٤$

لإيجاد نقطة التقاطع مع محور السينات

بوضع $ص = ٠$ $\therefore س = -٤$

$(-٤ ، ٠)$

* معادلة العمودي

$(ص - ٣) = -١ (س + ١)$

$ص = -س - ١ + ٣$

$ص = -س + ٢$

نقطة التقاطع مع محور السينات

$ص = ٠$ $\therefore -س = -٢$

$\therefore س = ٢$

$(٢ ، ٠)$

طول القاعدة $= | ٢ - (-٤) | = ٦$ وحدة

الارتفاع = الإحداثي الصادي للنقطة $= ٣$

$\therefore$ المساحة $= \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٣ = ٩$ وحدة مربعة

* ركز في الخطوات دي وخصوصاً إذا كان المطلوب مع محور الصادات

(٨) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $ص = س^٣$ والتي يمر المماس للمنحنى عندها بالنقطة $(٤ ، ٠)$

الحل

لاحظ في هذا النوع من المسائل النقطة لا تحقق المعادلة

$\therefore$ هي ليست نقطة تماس

* نقطة التماس هي $(أ ، د(أ)) = (أ ، أ^٣)$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣ س^٢$

الميل $= \frac{ءص}{ءس}]_{س = أ} = ٣ أ^٢$

$\because$ المماس يمر بالنقطتين $(٤ ، ٠)$ ، $(أ ، أ^٣)$

$\therefore \frac{أ^٣ - ٠}{أ - ٤} = ٣ أ^٢$ الميل

$٣ أ^٣ - ١٢ أ^٢ = أ^٣$

$٢ أ^٣ - ١٢ أ^٢ = ٠$

$أ^٢ (٢ أ - ١٢) = ٠$

إما $أ = ٠$ أو $٢ أ = ١٢ \leftarrow أ = ٦$

$\therefore$ النقطة $(٠ ، ٠)$ أو $(٦ ، ٢١٦)$

٩ اثبت أن المنحنى $\left(\frac{س}{أ}\right)^ن + \left(\frac{ص}{ب}\right)^ن = ٢$ يمس المستقيم

$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ٢$ عند النقطة (أ ، ب) مهما تكن قيمة ن

الحل

بالاشتقاق "س" $\left(\frac{س}{أ}\right)^ن + \left(\frac{ص}{ب}\right)^ن = ٢$

$\frac{ن}{أ}\left(\frac{س}{أ}\right)^{ن-١} + \frac{ن}{ب}\left(\frac{ص}{ب}\right)^{ن-١}\frac{دص}{دس} = ٠$

عند (أ ، ب)

$\frac{ن}{أ}\times ١ + \frac{ن}{ب}\times ١\ \frac{دص}{دس} = ٠$

∴ $\left(\frac{ن}{ب}\right)\frac{دص}{دس} = \frac{-ن}{أ}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-ن}{أ}\times\frac{ب}{ن} = \boxed{\frac{-ب}{أ}}$ ميل المماس

ميل المستقيم $= \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ ، $\frac{س}{أ}+\frac{ص}{ب}=٢$

$= \frac{-١}{أ} \div \frac{١}{ب} = \frac{-١}{أ}\times\frac{ب}{١} = \frac{-ب}{أ}$

∴ المستقيم يمس المنحنى عند (أ ، ب) لأي قيمة ن

ث.ع ٢٠١٨

١٠ اوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى

س = قاθ ، ص = ظاθ

عند $θ = \frac{π}{٦}$

الحل

عند $θ = \frac{π}{٦} = ٣٠°$

∴ $س = \frac{١}{جتا ٣٠°} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$

$ص = ظا ٣٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

∴ النقطة هي $\left(\frac{٢\sqrt{٣}}{٣} ، \frac{\sqrt{٣}}{٣}\right)$

$\frac{دص}{دθ} = قا^٢θ$

$\frac{دس}{دθ} = قاθ ظاθ$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دθ} \div \frac{دس}{دθ} = \frac{قا^٢θ}{قاθ ظاθ} = \frac{قاθ}{ظاθ}$

عند θ = ٣٠° ∴ الميل $= \frac{قا(٣٠°)}{ظا ٣٠°} = ٢$

ميل العمودي $= \frac{-١}{٢}$

معادلة المماس $\frac{ص - \frac{\sqrt{٣}}{٣}}{س - \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}} = ٢$

$٢س - \frac{٤\sqrt{٣}}{٣} = ص - \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

$٢س - ص - \frac{٣\sqrt{٣}}{٣} = ٠$

$\boxed{٢س - ص - \sqrt{٣} = ٠}$

معادلة العمودي $\frac{ص - \frac{\sqrt{٣}}{٣}}{س - \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}} = \frac{-١}{٢}$

∴ $٣س + ٦ص - ٤\sqrt{٣} = ٠$

(١١) إذا كان المنحنى:

$ص = ٢س^٣ + ٣س^٢ + ٤س + ٥$

مماسان متوازيان أحدهما يمس المنحنى عند $(-١، ٢)$ أوجد معادلة المماس الآخر

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = ٦س^٢ + ٦س + ٤$

ميل المماس عند $(-١، ٢)$ هو $٦ - ٦ + ٤ = ٤$

بوضع $\frac{ءص}{ءس} = ٤$

$\therefore ٦س^٢ + ٦س + ٤ = ٤$

$٦س^٢ + ٦س = ٠$

$٦س(س + ١) = ٠$

إما $س = ٠$ أو $س = -١$

عندها $ص = ٥$ عندها $ص = ٢$

$\therefore$ النقطتان $(٠، ٥)$ ، $(-١، ٢)$ موجودة

المطلوب

معادلة المماس عند $(٠، ٥)$

الميل $= ٤$

$\frac{ص - ٥}{س - ٠} = ٤$

$٤س = ص - ٥$

$٤س - ص + ٥ = ٠$

أي شيء

(١٢) اثبت أن مساحة $\triangle$ المحصور بين المماس للمنحنى $ص = \frac{١}{س}$ حيث $س > ٠$ عند أي نقطة عليه ومحوري الإحداثيات $= ٢$ وحدة مربعة

الحل

$ص = \frac{١}{س}$

$ص' = \frac{-١}{س^٢}$

نختار نقطة تماس $(أ، \frac{١}{أ})$

عندها $ص' = \frac{-١}{أ^٢}$

$\therefore$ معادلة المماس $\frac{ص - \frac{١}{أ}}{س - أ} = \frac{-١}{أ^٢}$

$س - أ = أ^٢ص - \frac{أ^٢}{أ} = -س + أ$

المماس $\boxed{س + أ^٢ص - ٢أ = ٠}$

لإيجاد نقطة التقاطع مع محور السينات

بوضع $ص = ٠$ $\therefore$ $\boxed{س = ٢أ}$

لإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات

$س = ٠$ $\therefore أ^٢ص = ٢أ$

$\boxed{ص = \frac{٢}{أ}}$

$\therefore$ المساحة $= \frac{١}{٢} \times ٢أ \times \frac{٢}{أ} = ٢$ وحدة مربعة

الدرس الخامس
المعدلات الزمنية المرتبطة

* $\frac{د}{دن}$ نق $=$ $\frac{دنق}{دن}$

* $\frac{د}{دن}$ نق^2 $=$ ٢ نق $\frac{دنق}{دن}$ وهكذا

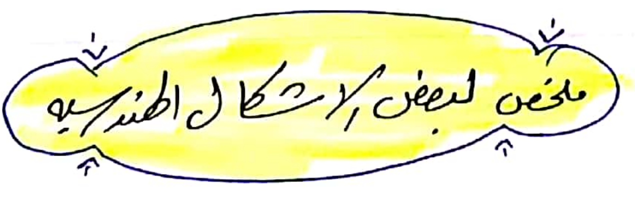
* فى حالة الزيادة أو التمدد $\frac{دس}{دن}$ (+)

* فى حالة الانكماش أو النقصان $\frac{دس}{دن}$ (−)

* مقدار الزيادة $=$ $\frac{دس}{دن} \times ن$
  $=$ المعدل × الزمن

* معدل الزيادة $=$ $\frac{\text{المقدار}}{ن}$

* س $=$ س. $+$ $\frac{دس}{دن} \times ن$
  ↓
  القيمة الابتدائية



(١) الدائرة

المحيط $=$ ٢ π نق

المساحة $=$ π نق^2

(٢) الكرة

المساحة $=$ ٤ π نق^2

الحجم $=$ $\frac{4}{3}$ π نق^3

(٣) المستطيل

المحيط $=$ ٢ × (س + ص)

المساحة $=$ س × ص

(٤) المثلث

المساحة $=$ $\frac{1}{2}$ أ ب جا جـ وهكذا

$=$ $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

(٥) المثلث المتساوي الأضلاع

المحيط $=$ ٣ل

المساحة $=$ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ل^2

(٦) المكعب

المساحة الجانبية $=$ ٤ ل^2

المساحة الكلية $=$ ٦ ل^2

الحجم $=$ ل^3

(٧) متوازي المستطيلات

الحجم $=$ س ص ع

⑧ الأسطوانة الدائرية القائمة

المساحة الكلية = ٢ط نق² + ٢ط نق ع

الحجم = ط نق² ع

⑨ المخروط القائم

الحجم = $\frac{1}{3}$ ط نق² ع

⑩ الهرم المنتظم

الحجم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع



* إذا كان الشكل يعبر عن دائرتين

المساحة المظللة = ط (نق²₂ − نق²₁)

* وإذا كان يعبر عن كرتين متداخلتين

حجم الجزء المظلل = $\frac{4}{3}$ ط (نق³₂ − نق³₁)

مسائل

① إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{4}{\pi}$ سم/ث فإن محيط الدائرة يزيد عند هذه اللحظة بمعدل ...... سم/ث

($\frac{4}{\pi}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{1}{8}$ ، ⑧)

الحل

محيط الدائرة = ٢ ط نق ∵ $\frac{دنق}{دن} = \frac{4}{\pi}$

$\frac{دح}{دن}$ = ٢ ط $\frac{دنق}{دن}$

$\frac{دح}{دن}$ = ٢ ط × $\frac{4}{\pi}$ = ٨ سم/ث

② تتحرك نقطة على المنحنى ص² = ٢٥ − س² بحيث $\frac{دس}{دن} = \frac{1}{3}$

عند النقطة (−٣، ٤) فإن $\frac{دص}{دن}$ = ...

(ⓘ$\frac{-1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{9}$ ، ٩)

الحل

بالاشتقاق بالنسبة لـ ن

٢ص $\frac{دص}{دن}$ = −٢س $\frac{دس}{دن}$

٢ × ٤ $\frac{دص}{دن}$ = −٢ × (−٣) × $\frac{1}{3}$

٨ $\frac{دص}{دن}$ = −٢

$\frac{دص}{دن}$ = $\frac{-2}{8}$ = $\frac{-1}{4}$

③ جسم يتحرك على المنحنى ص² = س³ ، إذا كان $\frac{دس}{دن} = \frac{1}{2}$ وحدة/ث

عند ص = −١ فإن $\frac{دص}{دن}$ = ... وحدة/ث

الحل

عند ص = −١ ∴ س³ = ١ ∴ س = ١

بالاشتقاق بالنسبة لـ (ن)

٢ص $\frac{دص}{دن}$ = ٣س² $\frac{دس}{دن}$

−٢ $\frac{دص}{دن}$ = ٣ × $\frac{1}{2}$

$\frac{دص}{دن}$ = $\frac{3}{2}$ ÷ −٢ = $\frac{-3}{4}$

٤ إذا كان ميل المماس لمنحنى ص = د(س) عند نقطة ما هو ١/٢ وكان الإحداثي السيني يتناقص بمعدل ٣ وحدات/ث فإن معدل تغير إحداثيها الصادي = ... وحدة/ث

(٣/٢ ، ١/٦ ، ‎-٣/٢ ، ‎-١/٦)

الحل

دص/دس = ١/٢

دس/دن = ‎-٣ ، دص/دن = ؟

∵ دص/دس = دص/دن ÷ دس/دن

١/٢ = دص/دن ÷ (‎-٣)

∴ دص/دن = ١/٢ × ‎-٣ = ‎-٣/٢

---

٥ يتزايد طول نصف قطر دائرة بمعدل ٢ سم/ث ومساحتها بمعدل ٢٠ π سم²/ث . فإن طول نصف قطرها عند هذه اللحظة = ... سم

(٥/٢ ، ٥ ، ١٠ ، ٢٠)

الحل

المساحة م = π نق²

دم/دن = ٢ π نق × دنق/دن

٢٠ π = ٢ π نق × ٢

٤ نق = ٢٠

∴ نق = ٥ سم

---

٦ ينصهر مكعب من الثلج محتفظاً بشكله بمعدل ١ سم³/ث فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه ٨ سم³ هو ...... سم/ث

(‎-١/١٢ ، ١/١٢ ، ‎-١/٦ ، ١/٦)

الحل

الحجم ح = ل³

عندما يكون ل³ = ٨ ∴ ل = ٢ سم

دح/دن = ٣ ل² دل/دن ← (١)

∵ دح/دن = ‎-١ سم³/ث لأنه ينصهر فيقل

∴ ٣ ل² دل/دن = ‎-١

٣ × ٤ دل/دن = ‎-١

∴ دل/دن = ‎-١/١٢

---

٧ تتحرك نقطة على المنحنى س² + ص² - ٤س + ٨ص - ٦ = ٠ وكان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن عند (٣، ١) يساوي ٤ وحدة/ث ، أوجد معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة للزمن

الحل

بالاشتقاق بالنسبة للزمن

٢س دس/دن + ٢ص دص/دن - ٤ دس/دن + ٨ دص/دن = ٠

بالتعويض ∵ دس/دن = ٤

٢×٣×٤ + ٢×١ دص/دن - ٤×٤ + ٨ دص/دن = ٠

٢٤ - ١٦ + ١٠ دص/دن = ٠

$$8 + 10 \frac{دص}{دس} = 0$$

$$10 \frac{دص}{دس} = -8$$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-8}{10} = \frac{-4}{5}$$

---

(٨) خزان بترول على شكل اسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٢٤ م. يراد تفريغ الخزان من البترول بمعدل ٢ م³/د. فما معدل تغير ارتفاع البترول فى الخزان ؟

الحل

$$\frac{دح}{دن} = -2 \text{ م}^3/\text{د}$$

$$ح = \pi \, نق^2 \, ع$$

الاسطوانة نصف القطر = ١٢ م وهو ثابت

المتغير هنا هو ارتفاع الخزان نتيجة تفريغه

$$\therefore ح = \pi \times (12)^2 \, ع$$

$$ح = 144 \pi \, ع$$

$$\frac{دح}{دن} = 144\pi \frac{دع}{دن}$$

$$\frac{دع}{دن} = \frac{دح}{دن} \div 144\pi$$

$$= \frac{-2}{144\pi} = \frac{-1}{72\pi} \text{ م/د}$$

---

(٩) مثلث متساوى الساقين طول قاعدته $20\sqrt{3}$. اذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم/ث. فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التى يكون فيها طول كل من ساقيه مساوياً لطول القاعدة

الحل

(رسم: مثلث متساوى الساقين، ساقاه س ، س وقاعدته $20\sqrt{3}$)

$$\frac{دس}{دن} = -3 \text{ سم/ث}$$

$$\text{الارتفاع هنا} = \sqrt{س^2 - (10\sqrt{3})^2}$$

$$ع = \sqrt{س^2 - 300}$$

المساحة = ½ طول القاعدة × الارتفاع ع

$$م = \frac{1}{2} \times 20\sqrt{3} \times \sqrt{س^2 - 300}$$

$$\frac{دم}{دن} = 10\sqrt{3} \times \frac{2س}{2\sqrt{س^2 - 300}} \times \frac{دس}{دن}$$

عند لحظة القياس تكون $س = 20\sqrt{3}$

$$\therefore \frac{دم}{دن} = 10\sqrt{3} \times \frac{2 \times 20\sqrt{3}}{2\sqrt{(20\sqrt{3})^2 - 300}} \times -3$$

$$= -60 \text{ سم}^2/\text{ث}$$

---

(١٠) بالون كروى مملوء بالغاز يتسرب منه الغاز بمعدل س سم³/ث. أثبت أن معدل نقص مساحته فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره نق يساوى $\frac{2س}{نق}$ سم²/ث.

الحل

$$\frac{دح}{دن} = س$$

حجم الكرة $ح = \frac{4}{3} \pi \, نق^3$

$$\frac{دح}{دن} = \frac{4}{3}\pi \times 3 نق^2 \frac{دنق}{دن} = 4\pi نق^2 \frac{دنق}{دن}$$

$$\therefore \frac{دنق}{دن} = \frac{س}{4\pi نق^2}$$

مساحة الكرة $م = 4\pi \, نق^2$

$$\frac{دم}{دن} = 8\pi \, نق \frac{دنق}{دن} = 8\pi \, نق \times \frac{س}{4\pi نق^2} = \frac{2س}{نق}$$

(١١) في سباق ١٠٠م، يجري اللاعب في مسار مستقيم باتجاه خط النهاية، وكانت إحدى الكاميرات خلف خط النهاية على ارتفاع ٥م وعمودية على مسار السباق وفي نفس المستوى الأفقي للمتسابقين. أوجد معدل تغير الزاوية التي تدور بها الكاميرا لرصد حركة اللاعب عندما كان على بعد ٥م من نهاية السباق ومعدل اقترابه ١٠م/ث.

الحل

$\frac{دس}{دن} = -١٠$ م/ث

ظا θ $= \frac{س}{٥}$

ظا θ $= \frac{1}{5}$ س

بالاشتقاق بالنسبة للزمن

قا²θ $\frac{دθ}{دن} = \frac{1}{5} \frac{دس}{دن}$

عند لحظة القياس س = ٥ ، θ = ٤٥°

قا²θ $= \frac{1}{جتا^2 45} = ٢$

$٢ \frac{دθ}{دن} = \frac{1}{5} \times -١٠$

$٢ \frac{دθ}{دن} = -٢$ ∴ $\frac{دθ}{دن} = (-١)$ ء/ث

---

(١٢) صفيحة على شكل سداسي منتظم تنكمش بالبرودة. وجد أن معدل تغير طول ضلعها ٠,٠١ سم/ث. أوجد معدل التغير في مساحة الصفيحة عندما طول ضلعها ١٠ سم.

الحل

تذكر: مساحة المضلع المنتظم $= \frac{1}{4}$ ن س² ظتا $\frac{\pi}{ن}$

ن: عدد الأضلاع، س: طول الضلع

∴ مساحة السداسي

$= \frac{1}{4} \times ٦ \times$ س² ظتا $\frac{١٨٠}{٦}$

م $= \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ س²

∵ $\frac{دس}{دن} = -٠,٠١$ سم/ث

$\frac{دم}{دن} = ٢ \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ س $\times \frac{دس}{دن}$

$= ٣\sqrt{٣} \times ١٠ \times (-٠,٠١)$

$= -٠,٣\sqrt{٣}$ سم²/ث.

---

(١٣) يسير رجل طوله ١٨٠ سم مبتعداً عن قائمة مصباح ارتفاعه ٣م بمعدل ١,٢م/ث. أوجد معدل تغير طول ظل الرجل. وإذا كان المستقيم المار بأعلى نقطة من رأس الرجل وقمة المصباح يميل على الأرض بزاوية θ عندما يبعد الرجل عن قائمة المصباح مسافة س متراً أثبت أن س $= \frac{٦}{٥}$ ظتا θ ثم أوجد معدل تغير θ عندما يبعد الرجل مسافة ٣,٦ متراً عن قائمة المصباح.

الحل

من التشابه بين ΔΔ

أ ب جـ ، هـ د جـ

$\frac{أب}{هـد} = \frac{بجـ}{دجـ}$

$\frac{3}{1.8} = \frac{ص+س}{ص}$

$3ص = 1.8ص + 1.8س$

$1.2ص = 1.8س$ ÷ 0.6

$2ص = 3س$

بالاشتقاق بالنسبة إلى ن

$2\frac{دص}{دن} = 3\frac{دس}{دن}$ ، $\because \frac{دس}{دن} = 1.2$

$\therefore \frac{دص}{دن} = \frac{3}{2} \times 1.2 = 1.8$ م/ث

وهو معدل تغير طول ظل الرجل

في Δ أ ب جـ :

$ظاθ = \frac{3}{س+ص} = \frac{3}{س + \frac{3}{2}س} = \frac{6}{5س}$

لاحظ العلاقة التي توجد

$\therefore ظاθ = \frac{6}{5س}$

$س = \frac{6}{5\,ظاθ}$ ، ∴ $س = \frac{6}{5}\,ظتاθ$

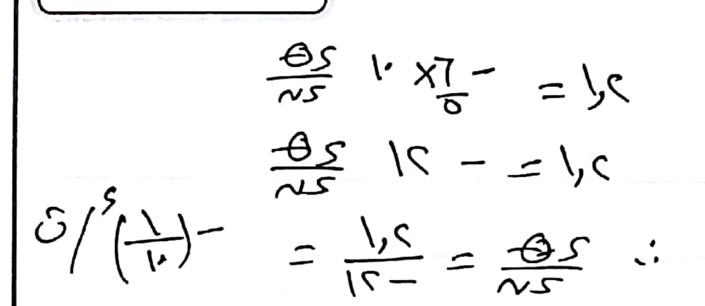
بالاشتقاق بالنسبة للزمن

$\frac{دس}{دن} = \frac{6}{5}\left(-قتا^2θ\right)\frac{دθ}{دن}$

عند $س = 3.6$ ∴ $θ = ظا^{-1}\left(\frac{6}{5 \times 3.6}\right)$

$θ = ظا^{-1}\frac{1}{3}$

$1.2 = \frac{6}{5}\left(-\left(\frac{\sqrt{10}}{1}\right)^2\right) \times \frac{دθ}{دن}$

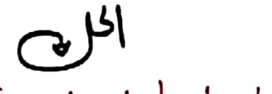


$1.2 = -\frac{6}{5} \times 10\,\frac{دθ}{دن}$

$1.2 = -12\,\frac{دθ}{دن}$

$\therefore \frac{دθ}{دن} = \frac{1.2}{-12} = -\left(\frac{1}{10}\right)$ ء/ث

(١٤) سلم ثابت الطول ينزلق طرفه العلوي على حائط رأسي بمعدل ل وحدة/ث ، أوجد معدل ابتعاد طرفه السفلي عن الحائط عندما يميل السلم على الرأسي بزاوية θ حيث $قتاθ = \frac{5}{4}$



الحل

نفرض أن طول السلم ل مقدار ثابت

$س^2 + ص^2 = ل^2$ ، ل ثابت

$2س\frac{دس}{دن} + 2ص\frac{دص}{دن} = 0$ ÷ 2

$س\frac{دس}{دن} = -ص\frac{دص}{دن}$

$\frac{دس}{دن} = \frac{-ص}{س}\left(\frac{دص}{دن}\right)$ ← (−ل)

عندما $قتاθ = \frac{5}{4}$

$\therefore جاθ = \frac{4}{5}$

$\therefore \frac{ص}{س} = \frac{3}{4}$

$\therefore \frac{دس}{دن} = \frac{-3}{4} \times -ل = \frac{3}{4}ل$ وحدة/ث

(١٥) يتمدد هرم رباعي منتظم من المعدن ارتفاعه = طول ضلع قاعدته فيزداد حجمه بمعدل ١ سم٣/ث ، إذا كان معدل تزايد كل من ارتفاع الهرم وطول ضلع قاعدته = ٠٫٠١ . فاحسب طول ضلع قاعدته

الحل

فاكرين حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{1}{3}$ س٢ ع

عندما س = ع

ح = $\frac{1}{3}$ س٣ سم٣

$\frac{دح}{دن} = ١$

$\frac{دس}{دن} = ٠٫٠١$

∴ $\frac{دح}{دن}$ = س٢ $\frac{دس}{دن}$

١ = س٢ × ٠٫٠١

س٢ = $\frac{1}{0.01}$ = ١٠٠

س = $\sqrt{100}$ = ١٠ سم

(١٦) قضيب طوله ٥ م مثبت بمفصل في الأرض عند أحد طرفيه ، فإذا رفع طرفه الآخر رأسياً إلى أعلى بواسطة ونش بمعدل ١ م/د . أوجد معدل تناقص طول مسقط القضيب على الأرض عندما يكون ارتفاع هذا الطرف ٣ م

الحل

$\frac{دس}{دن}$ = ١ م/د

طول مسقط القضيب = ص

∴ س٢ + ص٢ = ٢٥

٢س $\frac{دس}{دن}$ + ٢ص $\frac{دص}{دن}$ = ٠

عندما س = ٣ ∴ ص = ٤

∴ ٢ × ٣ × ١ + ٢ × ٤ $\frac{دص}{دن}$ = ٠

٨ $\frac{دص}{دن}$ = −٦

$\frac{دص}{دن}$ = $\frac{-6}{8}$ = $\frac{-3}{4}$ م/د

(١٧) إناء على هيئة أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها من الداخل ٩ سم وطول نصف قطرها = ٦ سم وضع داخلها ساق معدنية طولها ١٦ سم فإذا كان معدل انزلاق الطرف العلوي للساق مبتعدة عن حافة الأسطوانة ٢ سم/ث . أوجد معدل انزلاق الساق على قاعدة الأسطوانة عندما تصل إلى نهاية قاعدتها

الحل

$\frac{دس}{دن}$ = ٢ سم/ث

∴ س٢ = ص٢ + ٨١

٢س $\frac{دس}{دن}$ = ٢ص $\frac{دص}{دن}$ ÷ ٢

$\frac{دص}{دن}$ = $\frac{س}{ص}$ $\left(\frac{دس}{دن}\right)$

عندما يصل الساق إلى نهاية القاعدة

فإن ص = ١٢ سم ، س = ١٥ سم

∴ $\frac{دص}{دن}$ = $\frac{15}{12}$ × ٢ = $\frac{5}{2}$ سم/ث

دروس سحل وجميل وغشك ومرفل

(١٨) ألقي حجر فى بحيرة ساكنة فتولدت موجه دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٤ سم/ث . أوجد معدل التغير فى مساحة سطحها بعد ٥ ثوانى

شرق ٢٠١٧ أزهر ١٨

الحل

$\text{م} = \pi\ \text{نق}^2$ مساحة دائرة

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 2\pi\ \text{نق}\ \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$\because \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = 4$ سم/ث

وعندما $\text{ن} = 5$

$\therefore \text{نق} = \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} \times \text{ن} = 4 \times 5 = 20$ سم

$\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 2\pi \times 20 \times 4 = 160\pi$ سم²/ث

---

(١٩) مثلث قائم الزاوية ، فى لحظة ما كان طولا ضلعى القائمة ٦ سم ، ٣٠ سم فإذا كان طول الضلع الأول يتزايد بمعدل $\frac{1}{3}$ سم/ث و طول الضلع الثانى يتناقص بمعدل ١ سم/د ، أوجد

(أ) معدل التزايد فى مساحة المثلث بعد ٣ دقائق

(ب) الزمن الذى بعده يتوقف تزايد مساحة المثلث

الحل

نعمل بالقاعدة

$\text{ل} = \text{ل}_0 + \frac{\text{دل}}{\text{دن}} \times \text{ن}$

(البداية) (مقدار التغير)

(م)

$\text{س} = \frac{1}{3}\text{ن} + 6$

$\text{ص} = 30 - \text{ن}$

(ص ، س على أضلاع المثلث القائم)

المساحة $\text{م} = \frac{1}{2}\ \text{س} \times \text{ص}$

$\text{م} = \frac{1}{2}\left[(30 - \text{ن}) \times (\frac{1}{3}\text{ن} + 6)\right]$

(-1) ($\frac{1}{3}$)

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{1}{2}\left[(30 - \text{ن})\frac{1}{3} + (\frac{1}{3}\text{ن} + 6) - \right]$

$\frac{1}{2}\left[10 - \frac{1}{3}\text{ن} - \frac{1}{3}\text{ن} - 6\right]$

$\frac{1}{2}\left[4 - \frac{2}{3}\text{ن}\right]$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 2 - \frac{2}{6}\text{ن}$

عند $\text{ن} = 3$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 2 - \frac{2}{6} \times 3 = 2 - 1 = 1$ سم²/د

(ب) الزمن الذى يتوقف فيه تزايد المساحة

بوضع $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 0$

$\therefore 2 - \frac{2}{6}\text{ن} = 0$

$2 = \frac{2}{6}\text{ن}$

$\therefore \text{ن} = \frac{2 \times 6}{2} = 6$ دقائق



الدرس الأول: نهايات الدوال المرتبطة بالعدد هـ



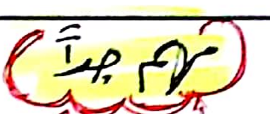
* $لو_{أ} أ = ١$
* $لو_{أ} ١ = صفر$
* $لو_{أ} س^{ن} = ن\ لو_{أ} س$
* $لو_{أ} س ص = لو_{أ} س + لو_{أ} ص$
* $لو_{أ} \frac{س}{ص} = لو_{أ} س - لو_{أ} ص$
* $لو_{ص} س = \frac{١}{لو_{س} ص}$
* $لو_{ص} س = \frac{لو\ س}{لو\ ص}$

الفرق بين $لو\ أ$ ، $لو_{هـ} أ$

$لو\ أ$ ← لوغاريتم معتاد — Log

$لو_{هـ} أ$ ← لوغاريتم طبيعى — Ln

على الآلة



① $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{١}{ن!} = ١ + \frac{١}{١!} + \frac{١}{٢!} + \frac{١}{٣!} + \dots = هـ$

② $\lim_{س \to ٠} (١ + س)^{\frac{١}{س}} = هـ$

③ $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س} = هـ$

لاحظ ان ناتج ضرب اللى جوه = ١

دى هتسهل عليك الحفظ

لو اللى جوه مضروبة يبقى برة مقلوبة والعكس

قواعد تستخدم فى الحل

① $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{أ س} = هـ^{أ}$

② $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{أ س + ب} = هـ^{أ}$

③ $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{أ}{س}\right)^{س} = هـ^{أ}$

④ $\lim_{س \to ٠} هـ^{س} = ١$

⑤ $\lim_{س \to ٠} \frac{لو_{أ}(١ + س)}{س} = لو_{أ} هـ$

ومنها $\lim_{س \to ٠} \frac{لو_{هـ}(١ + س)}{س} = ١$

⑥ $\lim_{س \to ٠} \frac{أ^{س} - ١}{س} = لو_{هـ} أ$

ومنها $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س} - ١}{س} = ١$

$\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{أ س} - ١}{ب س} = \frac{أ}{ب}$



① $\lim_{\text{س}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{3\text{س}} = \text{هـ}^{3}$

② $\lim_{\text{س}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\frac{1}{5}\text{س}} = \text{هـ}^{\frac{1}{5}}$

③ $\lim_{\text{س}\to\infty}\left(1+\frac{5}{\text{س}}\right)^{\text{س}} = \text{هـ}^{5}$

④ $\lim_{\text{س}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}+1} = \text{هـ}$

⑤ $\lim_{\text{س}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{س}+1}\right)^{\text{س}}$

بوضع $\text{س}+1=\text{ص}$ ∴ $\text{س}=\text{ص}-1$

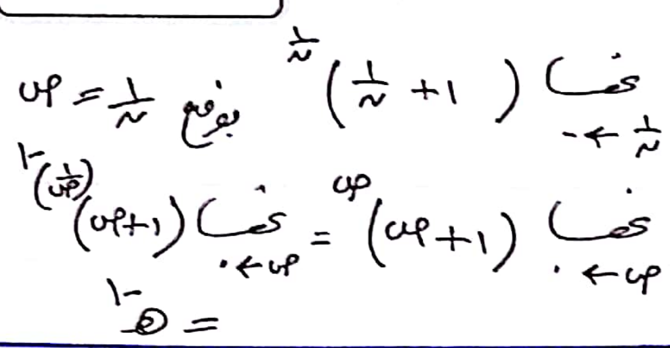
$\lim_{\text{ص}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{ص}}\right)^{\text{ص}-1}$

$= \text{هـ}$

⑥ $\lim_{\text{ن}\to\infty}\left(\frac{\text{ن}}{1+\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$

عندما $\text{ن}\to\infty$ فإن $\frac{1}{\text{ن}}\to 0$

$\lim_{\frac{1}{\text{ن}}\to 0}\left(\frac{1+\text{ن}}{\text{ن}}\right)^{-\frac{1}{\text{ن}}}$



$\lim_{\frac{1}{\text{ن}}\to 0}\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\frac{1}{\text{ن}}}$ بوضع $\frac{1}{\text{ن}}=\text{ص}$

$\lim_{\text{ص}\to 0}(1+\text{ص})^{\text{ص}} = \lim_{\text{ص}\to 0}\left((1+\text{ص})^{\frac{1}{\text{ص}}}\right)^{-1}$

$= \text{هـ}^{-1}$

⑦ $\lim_{\text{س}\to\infty}\left(\frac{2\text{س}+5}{2\text{س}+1}\right)^{\text{س}+2}$

$\lim_{\text{س}\to\infty}\left(\frac{(2\text{س}+1)+4}{(2\text{س}+1)}\right)^{\frac{1}{2}(2\text{س}+1)+\frac{3}{2}}$

بوضع $2\text{س}+1\to\text{ص}$

∵ $\text{س}\to\infty$ ∴ $2\text{س}+1\to\infty$

$\lim_{\text{ص}\to\infty}\left(1+\frac{4}{2\text{س}+1}\right)^{\frac{1}{2}\text{ص}+\frac{3}{2}}$

$= \text{هـ}^{4\times\frac{1}{2}} = \text{هـ}^{2}$

⑧ $\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{هـ}^{3\text{س}}-1}{\text{س}}$

نأخذ $\frac{\text{الأس اللي فوق}}{\text{المعامل اللي تحت}}$ خارج النهاية

$= \frac{3}{1}\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{هـ}^{3\text{س}}-1}{3\text{س}}$

∵ $\text{س}\to 0$ ∴ $3\text{س}\to 0$

$\frac{3}{1}\lim_{\text{ص}\to 0}\frac{\text{هـ}^{\text{ص}}-1}{\text{ص}} = 3\times 1 = 3$

⑨ $\lim_{\text{س}\to 0}\frac{2^{\text{س}}-1}{3\text{س}} = \text{.....}$ ت ع ص ٢١٨

$\frac{1}{3}\ \text{لو}_{\text{هـ}}2$

(٩) $\underset{س \to ٠}{نها} \dfrac{هـ^{-س} - ١}{س}$

الحل

$-١ \times \underset{-س \to ٠}{نها} \dfrac{هـ^{-س} - ١}{-س}$

$-١ \times ١ = -١$

---

(١٠) $\underset{س \to ٠}{نها} \dfrac{هـ^{٤س} - ١}{٥س}$

الحل

$= \dfrac{٤}{٥} \underset{٤س \to ٠}{نها} \dfrac{هـ^{٤س} - ١}{٤س}$

$\dfrac{٤}{٥} \times ١ = \dfrac{٤}{٥}$

---

(١١) $\underset{س \to ٠}{نها} \dfrac{هـ^{س} - جاس - ١}{س}$

الحل

هنقسمها لنهايتين

$\underset{س \to ٠}{نها} \dfrac{هـ^{س} - ١}{س} - \underset{س \to ٠}{نها} \dfrac{جاس}{س}$

$١ - ١ = صفر$

---

(١٢) $\underset{س \to ٠}{نها} \dfrac{لو_{هـ} (١ + ٢س)}{س}$

الحل

$\dfrac{٢}{١} \underset{٢س \to ٠}{نها} \dfrac{لو_{هـ} (١ + ٢س)}{٢س} = ٢ \times ١ = ٢$

---

(١٣) $\underset{س \to ٠}{نها} \dfrac{لو_{هـ} (١ + س^{٤})}{س^{٤}}$

الحل

$\underset{س^{٤} \to ٠}{نها} \dfrac{لو_{هـ} (١ + س^{٤})}{س^{٤}} = ١$

---

(١٤) $\underset{س \to ٠}{نها} \dfrac{أ^{٢س} - ١}{س}$

الحل

$٢ \underset{٢س \to ٠}{نها} \dfrac{أ^{٢س} - ١}{٢س}$

$= ٢ \, لو_{هـ} أ$

---

(١٥) $\underset{س \to ٠}{نها} (١ + ٣ ظا^{٢}س)^{ظتا^{٢}س}$

الحل

عند $س \to ٠$ ∴ $ظا^{٢}س \to ٠$ ، $= \dfrac{١}{ص}$

$ص = ظتا^{٢}س \to \infty$

$\underset{ص \to \infty}{نها} \left(١ + \dfrac{٣}{ص}\right)^{ص} = هـ^{٣}$

---

(١٦) أثبت أن $\underset{ن \to \infty}{نها} ن \left[لو_{هـ}(ن+١) - لو_{هـ} ن \right] = ١$

الحل

المقدار $= \underset{ن \to \infty}{نها} ن \, لو_{هـ} \left(\dfrac{ن+١}{ن}\right) = \underset{ن \to \infty}{نها} لو_{هـ} \left(\dfrac{ن+١}{ن}\right)^{ن}$

$لو_{هـ} \underset{ن \to \infty}{نها} \left(\dfrac{ن+١}{ن}\right)^{ن}$

$لو_{هـ} \left[\underset{ن \to \infty}{نها} \left(١ + \dfrac{١}{ن}\right)^{ن} \right]$

$لو_{هـ} هـ = ١$

لاحظ أن نهاية اللوغاريتم = لو للنهاية

وتم تطبيق خواص اللوغاريتمات

الدرس الثالث

مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

$د(س) = هـ^{س}$ فإن $د'(س) = هـ^{س}$

$د(س) = أ^{س}$ فإن $د'(س) = أ^{س} \, لو_{هـ} أ$

(١) مشتقة الدوال الأسية

= مشتقة دالة الأس × الدالة نفسها × $لو_{هـ}$ الأساس

$د(س) = لو_{هـ} س$ ، $د'(س) = \frac{1}{س}$

(٢) مشتقة الدوال اللوغاريتمية

$$= \frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{الدالة} \times لو_{هـ} \text{الأساس}}$$



أوجد المشتقة الأولى لكل مما

(١) $ص = س^{2} + ٣هـ^{س}$

الحل

$$\frac{دص}{دس} = ٢س + ٣هـ^{س}$$

(٢) $ص = ٢س + هـ^{٦س}$

الحل

$$\frac{دص}{دس} = ٢ + ٦هـ^{٦س}$$

(٣) $ص = ٢هـ^{س} + جتا٢س$

الحل

$$\frac{دص}{دس} = ٢هـ^{س} - ٢جا٢س$$

(٤) $ص = ٥ \times ٦^{س}$

الحل

$$\frac{دص}{دس} = ٥ \times ٦^{س} \, لو_{هـ} ٦$$

(٥) $ص = ٣^{(٣س^{2} - ٥س + ٢)}$

الحل

$$\frac{دص}{دس} = ٣^{(٣س^{2} - ٥س + ٢)} \times (٦س - ٥) \, لو_{هـ} ٣$$

(٦) $ص = هـ^{س} جاس$

الحل

$هـ^{س}$ ← $هـ^{س}$ ، جاس ← جتاس

$$هـ^{س} جتاس + هـ^{س} جاس$$

$$= هـ^{س} (جتا س + جا س)$$

(٧) $ص = لو_{هـ} س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س}$

(٨) $ص = لو_{هـ} ٥س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٥}{٥س} = \frac{1}{س}$

(٩) $ص = لو_{هـ} \frac{1}{٢} س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{\frac{1}{٢}}{\frac{1}{٢} س} = \frac{1}{س}$



(١) $ص = لو_{هـ} (٢س^{٣} + ٩)$

$= \frac{٦س^{٢}}{٢س^{٣} + ٩}$

(٢) $ص = لو_{هـ} \frac{س^{٢}}{س + ٧}$

$ص = لو_{هـ} س^{٢} - لو_{هـ} (س + ٧)$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢س}{س^{٢}} - \frac{1}{س + ٧}$

$\frac{٢}{س} - \frac{1}{س + ٧}$

(٣) $ص = لو \left(\frac{هـ^{س^{٢}}}{س^{٢}}\right)$

$\therefore ص = لو هـ^{س^{٢}} - لو س^{٢}$

$ص' = \frac{٢س هـ^{س^{٢}}}{هـ^{س^{٢}} لو_{هـ} ١٠} - \frac{٢س}{س^{٢} لو_{هـ} ١٠}$

$\frac{٢س}{لو_{هـ} ١٠} - \frac{٢}{س لو_{هـ} ١٠}$

$٢س لو هـ - \frac{٢}{س} لو هـ$

$(٢س - \frac{٢}{س}) لو هـ$

(٤) إذا كانت $د(س) = هـ^{٣س}$ فإن $د'(س)$ تساوى ....

[$هـ^{س}$ ، $٣هـ^{٣س}$ ، $٩هـ^{٣س}$ ، $٣هـ^{٢س}$]

(٥) إذا كانت $د(س) = أ هـ^{س}$ فإن $د'(-٢) = $ ....

$-د(٢)$ ، $-د'(٢)$ ، $د(-٢)$

لاحظ أن $د(س) = أ هـ^{س}$

$د'(س) = أ هـ^{س}$

$\therefore د'(-٢) = د(-٢)$

⑥ إذا كانت د(س) = س٢ - ٣ لوهـ س

فإن دَ(٢) = ...

[-١ ، ١ ، (٥/٢) ، ٦]

دَ(س) = ٢س - ٣ × ١/س

دَ(٢) = ٤ - ٣/٢ = ٤ - ١,٥ = ٥/٢

⑦ معادلة المماس لمنحنى الدالة

د حيث د(س) = هـ^(٢س+١)

عند (-١/٢ ، ١) هي ....

أ) ٢ص = س + ١ ب) ص = ٢س + ٢ (محاطة)

جـ) ص = ٢س - ٣ د) ٢ص = ٣س + ١

الميل = دص/دس = ٢ هـ^(٢س+١)

م = (دص/دس) عند س = -١/٢ = ٢ × هـ⁰ = ٢

ص - ١ = ٢(س + ١/٢)

ص - ١ = ٢س + ١

ص = ٢س + ٢ //

⑧ النسبة بين ميل مماس المنحنى ص = لوهـ ٣(س+١)

وميل مماس المنحنى ص = لوهـ ٥(س+١)

عند س = أ هي نسبة ..... !--

[٣ : ٥ ، ٥ : ٣ ، (١ : ١) ، لوهـ ٣ : لوهـ ٥]

خاكر لما قلنا إن د/دس لوهـ س = ١/س

د/دس لوهـ ٥س = ١/س

وهكذا

⑨ أوجد دص/دس في كل مما يلي

ص = س^(٢س)

بأخذ لوهـ للطرفين

لوهـ ص = لوهـ س^(٢س)

لوهـ ص = ٢س لوهـ س

١/ص · دص/دس = ٢س × ١/س + ٢ × لوهـ س

دص/دس = ص (٢ + ٢ لوهـ س)

دص/دس = س^(٢س) (٢ + ٢ لوهـ س)

⑩ ص = هـ^(س^هـ)

بأخذ لوهـ للطرفين

لوهـ ص = لوهـ هـ^(س^هـ)

لوهـ ص = (س^هـ) لوهـ هـ

((اصحى ياعم الحاج))

$لو_{هـ} ص = س^{هـ}$

$\frac{ص'}{ص} = هـ س^{هـ-1}$

$ص' = ص \; هـ \; س^{هـ-1}$

$\frac{دص}{دس} = هـ^{س^{هـ}} \times هـ \; س^{هـ-1}$

---

(١١) $ص^2 = 3^{س} \times 2^{ص}$

الحل

بأخذ $لو_{هـ}$ للطرفين

$لو_{هـ} ص^2 = لو_{هـ} 3^{س} \times 2^{ص}$

$2 لو_{هـ} ص = لو_{هـ} 3^{س} + لو_{هـ} 2^{ص}$

$2 لو_{هـ} ص = س لو_{هـ} 3 + ص لو_{هـ} 2$

$2 \frac{ص'}{ص} = لو_{هـ} 3 + ص' لو_{هـ} 2$

$2 \frac{ص'}{ص} - ص' لو_{هـ} 2 = لو_{هـ} 3$

$ص' \left(\frac{2}{ص} - لو_{هـ} 2\right) = لو_{هـ} 3$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{لو_{هـ} 3}{\frac{2}{ص} - لو_{هـ} 2}$$

---

(١٢) إذا كان $ص = هـ^{3س} + س^2$

اثبت أنه $\frac{د^2ص}{دس^2} - 2 = 9(ص - س^2)$

الحل

$ص = هـ^{3س} + س^2$

$\frac{دص}{دس} = 3هـ^{3س} + 2س$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = 9هـ^{3س} + 2$

$\because هـ^{3س} = ص - س^2$

$\therefore \frac{د^2ص}{دس^2} = 9(ص - س^2) + 2$

$\therefore \frac{د^2ص}{دس^2} - 2 = 9(ص - س^2)$ #

---

(١٣) إذا كان $أ^{ص} = ب^{س}$ فإن $\frac{دص}{دس} = \ldots\ldots$

ثانية ٢٠١٨

(أ) $\frac{أ}{ب}$ (ب) $لو_{أ} ب$

(جـ) $لو_{ب} أ$ (د) $أ^{ب}$

الحل

بأخذ $لو_{هـ}$ للطرفين

$لو_{هـ} أ^{ص} = لو_{هـ} ب^{س}$

$ص لو_{هـ} أ = س لو_{هـ} ب$ بالاشتقاق

$ص' لو_{هـ} أ = لو_{هـ} ب$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{لو_{هـ} ب}{لو_{هـ} أ} = لو_{أ} ب$$



$$هـ^{لوس} = س$$

---

١٤ إذا كان $ص = هـ^{لوس}$ فإن

$$\frac{دص}{دس} = ----$$

الحل

$$ص = س$$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = ١$$

وإذا طلب $د'(٢) = ١$

$د'(١٠) = ١$ عارفين ليه طبعاً.

---

١٥ $$\lim_{س \to هـ} \frac{هـ^{لوس} - ١}{س - هـ} = ----$$

(أ) هـ (ب) $\frac{١}{هـ}$ (ج) س (د) $\frac{١}{س}$

الحل

فكرة الحل

$$\lim_{س \to هـ} \frac{د(س) - د(هـ)}{س - هـ} = د'(هـ)$$

$$د(س) = هـ^{لوس}$$

$$\lim_{س \to هـ} \frac{هـ^{لوس} - هـ^{لوهـ}}{س - هـ} = \left[\frac{١}{س}\right]_{س = هـ} = \frac{١}{هـ}$$

الدرس الثالث
تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

① $\int هـ^{س} \, ءس = هـ^{س} + ث$

② $\int هـ^{ل س + م} \, ءس = \frac{1}{ل} هـ^{ل س + م} + ث$

③ $\int د'(س) \, هـ^{د(س)} \, ءس = هـ^{د(س)} + ث$

④ $\int م^{س} \, ءس = \frac{م^{س}}{لو_{هـ} م} + ث$

⑤ $\int \frac{1}{س} \, ءس = لو_{هـ} |س| + ث$

⑥ $\int \frac{د'(س)}{د(س)} \, ءس = لو_{هـ} |د(س)| + ث$

⑦ $\int$ البسط مشتقة المقام $= لو_{هـ} |$دالة المقام$| + ث$



أوجد قيمة كلاً مما

① $\int هـ^{٤س} \, ءس$

الحل

$= \frac{1}{4} هـ^{٤س} + ث$

② $\int هـ^{١-٣س} \, ءس$

الحل

$= \frac{-1}{3} هـ^{١-٣س} + ث$

③ $\int \left(\frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{هـ^{س}} \right) ءس$

الحل

$= \int \left(\frac{هـ^{س}}{هـ^{س}} + \frac{هـ^{-س}}{هـ^{س}} \right) ءس$

$\int \left(1 + هـ^{-س-س} \right) ءس$

$\int \left(1 + هـ^{-٢س} \right) ءس$

$س - \frac{1}{2} هـ^{-٢س} + ث$

④ $\int \left(س^{هـ} + هـ^{٣س} \right) ءس$

الحل

دالة عادية ، دالة أسية

نزود الأس واحد
ونقسم على الأس الجديد

$= \frac{س^{هـ+1}}{هـ+1} + \frac{1}{3} هـ^{٣س} + ث$

⑤ $\int ٤س \, هـ^{س^2+1} \, ءس$

الحل

$٢ \int ٢س \, هـ^{س^2+1} \, ءس$

$٢ \, هـ^{س^2+1} + ث$

(٦) ∫ $\frac{٢}{س}$ ءس

الحل

= ٢ ∫ $\frac{١}{س}$ ءس

= ٢ لو_هـ |س| + ث



(٧) ∫ $\frac{٤}{٣س \text{ لو}_هـ ٥}$ ءس

الحل

= $\frac{٤}{٣ \text{ لو}_هـ ٥}$ ∫ $\frac{١}{س}$ ءس

= $\frac{٤}{٣ \text{ لو}_هـ ٥}$ لو_هـ |س| + ث

---

(٨) ∫ (جتاس هـ^جاس + ٣س^٢) ءس

الحل

بوضع ص = جاس

ص' = جتاس

∫ (د'(س) هـ^د(س) + ٣س^٢) ءس

= هـ^جاس + $\frac{٣}{٣}$ س^٣ + ث

= هـ^جاس + س^٣ + ث

---

(٩) ∫ $\frac{٢س + ٣}{س^٢ + ٣س - ٢}$ ءس

الحل

بوضع د(س) = س^٢ + ٣س - ٢

د'(س) = ٢س + ٣

∫ $\frac{د'(س)}{د(س)}$ ءس

= لو_هـ |د(س)| + ث

= لو_هـ |س^٢ + ٣س - ٢| + ث

---

(١٠) ∫ ظاس ءس

الحل

= ∫ $\frac{جاس}{جتاس}$ ءس

= − ∫ $\frac{-جاس}{جتاس}$ ءس

= − لو_هـ |جتاس| + ث

= لو_هـ |(جتاس)^{-١}| + ث

= لو_هـ |قاس| + ث

---

(١١) ∫ قاس ءس

الحل

بالضرب × $\frac{قاس + ظاس}{قاس + ظاس}$

∫ $\frac{قاس (قاس + ظاس)}{قاس + ظاس}$ ءس

∫ $\frac{قا^٢س + قاس ظاس}{ظاس + قاس}$ ءس

= لو_هـ |ظاس + قاس| + ث

∫ قتاس ءس × $\frac{قتاس + ظتاس}{قتاس + ظتاس}$

(١٢) $\int$ ٤س هـ^{س^٢} ءس = - - - -

(أ) $\frac{١}{٢}$ هـ^{س^٢} + ث (ب) هـ^{س^٢} + ث

(جـ) ٢هـ^{س^٢} + ث (د) ٤هـ^{س^٢} + ث

---

(١٣) $\int$ ظاس ءس = - - - -

(أ) − لوهـ |جتاس| + ث (ب) − لوهـ جتاس + ث

(جـ) لوهـ جتاس + ث (د) لوهـ |جتاس| + ث

---

(١٤) $\int \frac{\text{لوهـ س}^٢}{\text{لوهـ س}}$ ءس = - - - - + ث

(أ) $\frac{س^٢}{٢}$ (ب) $\frac{١}{س}$ (جـ) ٢س (د) لوهـ س

الحل

$\int \frac{\text{لوهـ س}^٢}{\text{لوهـ س}} = \int \frac{٢\,\text{لوهـ س}}{\text{لوهـ س}}$ ءس

$= ٢ \int$ ءس $=$ ٢س + ث

---

(١٥) $\int \frac{١}{\text{س لوهـ س}^٣}$ ءس = - - - - + ث

(أ) ٣لوهـ |س| (ب) ٣لوهـ |لوهـ س|

(جـ) $\frac{١}{٣}$ لوهـ |س| (د) $\frac{١}{٣}$ لوهـ |لوهـ س|

الحل

$= \int \frac{١}{\text{٣س لوهـ س}}$ ءس

$= \frac{١}{٣} \int \frac{\frac{١}{س}}{\text{لوهـ س}}$ ءس

مشتقتها ← $\frac{١}{س}$ ، الدالة ← لوهـ س

$= \frac{١}{٣} \int \frac{\frac{١}{س}}{\text{لوهـ س}}$ ءس

$\frac{١}{٣}$ لوهـ |لوهـ س| + ث

---

(١٦) إذا كانت د‵(س) = $\frac{١}{٢}$[هـ^{س} + هـ^{−س}]

، د(٠) = ١ ، د‵(٠) = ٠

فإن د(س) = - - - -

(أ) − د(س) (ب) د(س)

(جـ) − د‵(س) (د) د‵(س)

الحل

∵ د‵(س) = $\frac{١}{٢}$[هـ^{س} + هـ^{−س}]

∴ د‵(س) = $\int \frac{١}{٢}$[هـ^{س} + هـ^{−س}] ءس

= $\frac{١}{٢}$هـ^{س} − $\frac{١}{٢}$هـ^{−س} + ث

∵ د‵(٠) = ٠

$\frac{١}{٢}$ × هـ^٠ − $\frac{١}{٢}$هـ^٠ + ث = ٠

$\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}$ + ث = ٠ ∴ ث = ٠

د‵(س) = $\frac{١}{٢}$هـ^{س} − $\frac{١}{٢}$هـ^{−س}

د(س) = $\frac{١}{٢}$هـ^{س} + $\frac{١}{٢}$هـ^{−س} + ث

عند د(٠) = ١

$\frac{١}{٢}$ هـ^٠ + $\frac{١}{٢}$هـ^٠ + ث = ١

$\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}$ + ث = ١ ∴ ث = ٠

∴ د(س) = $\frac{١}{٢}$هـ^{س} + $\frac{١}{٢}$هـ^{−س} = د‵‵(س)

(١٧) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه $(س، ص)$ يساوى $٤ هـ^{٢س}$

، $د(٠) = ٢$ فإن $د(-٢) = \dots$

(أ) ٤ (ب) $٤ هـ^{٤}$ (ج) $٢ هـ^{-٤}$ (د) $٢ هـ$

الحل

$\frac{دص}{دس} = ٤ هـ^{٢س}$

$ص = \int ٤ هـ^{٢س} \, دس$

$= \frac{٤}{٢} هـ^{٢س} + ث$

$٢ هـ^{٢س} + ث$

$\because د(٠) = ٢$

$٢ + ث = ٢ \quad \therefore ث = ٠$

$\therefore د(س) = ٢ هـ^{٢س}$

$د(-٢) = ٢ هـ^{-٤}$ #.

---

(١٨) $\int (س^{٣} + أ^{س} + هـ^{س} \cdot أ^{س} + ط ط) \, دس$

الحل

$= \int (س^{٣} + أ^{س} + (هـ أ)^{س} + ط ط) \, دس$

$= \frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{أ^{س}}{لو_{هـ} أ} + \frac{(هـ أ)^{س}}{لو_{هـ} هـ أ} + (ط ط) س + ث$

ده معامل ثابت

فى الاشتقاق كنا نضرب فى التكامل نقسم على $لو_{هـ} أ$

---

(١٩) $\int \frac{(١ + لو_{هـ} س)^{٢}}{س} \, دس$

الحل

$= \int \left(\frac{١}{س}\right) (١ + لو_{هـ} س)^{٢} \, دس$

$\int د'(س) \; د(س) \; دس$

$= \frac{١}{٣} (١ + لو_{هـ} س)^{٣} + ث$

---

(٢٠) مثال مهم ينفع لدرس المعدلات الزمنية

خزان فارغ سعته ١٠ م^٣ يصب فيه الماء تدريجياً بمعدل $(٢ن + ٣)$ م^٣/د أوجد الزمن اللازم لامتلاء الخزان حيث ن بالدقائق

الحل

$\frac{دح}{دن} = ٢ن + ٣$ بالتكامل

$ح = \int (٢ن + ٣) \, دن$

$ح = ن^{٢} + ٣ن + ث$

عند البداية $ن = ٠ ، ح = ٠$

$\therefore ث = ٠$

$\therefore ح = ن^{٢} + ٣ن$ عند الامتلاء

$ن^{٢} + ٣ن = ١٠$

$ن^{٢} + ٣ن - ١٠ = ٠$

$(ن + ٥)(ن - ٢) = ٠$

إما $ن = -٥$ مرفوض أو **$ن = ٢$ دقيقة**

الوحدة الثالثة

الدرس الأول والثاني والثالث

النقطة الحرجة

* تكون عندها المشتقة الأولى = صفر أو غير موجودة.

* إذا كانت د متصلة على [أ، ب] ، ج ∈]أ، ب[بحيث

(١) د'(ج) = صفر أو د'(ج) غير موجودة

∴ (ج، د(ج)) نقطة حرجة

أي أن ج لا بداية د للمجال.

في النقطة الحرجة يكون المماس أفقي أو رأسي

القيم العظمى والصغرى المحلية

* إذا كانت (ج، د(ج)) نقطة حرجة

(١) د'(س) > ٠ عندما س < ج قبلها تزايد

، د'(س) < ٠ عندما س > ج بعدها تناقص

فإن د(ج) قيمة عظمى محلية

(٢) د'(س) < ٠ عندما س < ج قبلها تناقص

د'(س) > ٠ عندما س > ج بعدها تزايد

فإن د(ج) قيمة صغرى محلية

(٣) إذا لم يحدث تغير في إشارة د'(س) على جانبي ج ، فإنه لا يوجد للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية عند ج

اختبار المشتقة الثانية

(١) د''(ج) < ٠ فإن د(ج) قيمة عظمى محلية

(٢) د''(ج) > ٠ فإن د(ج) قيمة صغرى محلية

(٣) د''(ج) = ٠ فإن اختبار المشتقة الثانية غير مناسب

القيم القصوى

إذا كانت د دالة معرفة [أ، ب]

، ج ∈ [أ، ب]

(١) د(ج) قيمة صغرى مطلقة عندما

د(ج) ≤ د(س) لكل س ∈ [أ، ب]

(٢) د(ج) قيمة عظمى مطلقة عندما

د(ج) ≥ د(س) لكل س ∈ [أ، ب]



إذا كانت د معرفة على [أ، ب] وكانت

(١) د'(س) > ٠ تزايدية على نفس الفترة

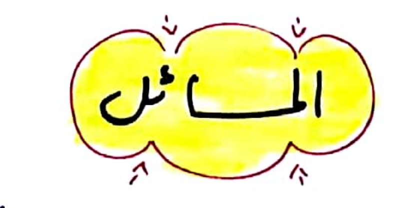
د(أ) قيمة صغرى مطلقة

د(ب) قيمة عظمى مطلقة

(٢) د'(س) < ٠ تناقصية على نفس الفترة

د(أ) قيمة عظمى مطلقة

د(ب) قيمة صغرى مطلقة



(١) عين فترات التزايد والتناقص والقيم العظمى والصغرى المحلية للدوال:

د(س) = ١٢س − س^٣

الحل

الخطوات

(١) هنجيب المجال

(٢) د'(س)

(٣) د'(س) = ٠ للتقسيم للنقط الحرجة

وتكمل

المجال = ح

د'(س) = ١٢ − ٣س^٢

بوضع د'(س) = ٠ ∴ ١٢ − ٣س^٢ = ٠

١٢ = ٣س^٢ ∴ س^٢ = ٤

∴ س = ± ٢

س: ٢- ، ٢

د(س)

∞- ، ∞

د'(س): − − − (٠) + + + (٠) − − −

إشارة د'

الدالة تزايدية في]-٢، ٢[

وتناقصية في]-∞، -٢[∪]٢، ∞[

عند س = -٢ صغرى محلية (-٢، -١٦)

بالتعويض في الدالة الأصلية

عند س = ٢ عظمى محلية (٢، ١٦)

(٢) د(س) = ∛(س^٢)

الحل

المجال = ح

د(س) = س^{٢/٣}

د'(س) = ٢/٣ س^{-١/٣} = ٢ / (٣ ∛س)

عند س = ٠ د'(س) غير معرفة

∴ عندها نقطة حرجة

س: ٠

د(س)

∞- ، ∞

د'(س): − − − (٠) + + +

إشارة د'

عند س = ٠ صغرى محلية (٠، ٠)

الدالة تناقصية $]-\infty ، ٠[$

وتزايدية $]٠، \infty[$

---

٣ $د(س) = \frac{س^٢}{١ - س}$

الحل

المجال ح − {١}

$د'(س) = \frac{٢س(١-س) - س^٢(-١)}{(١-س)^٢}$

بوضع $د'(س) = ٠$

$٢س(١-س) + س^٢ = ٠$

$٢س - ٢س^٢ + س^٢ = ٠$

$٢س - س^٢ = ٠$

$س(٢ - س) = ٠$

س = ٠ أو س = ٢

أكمل الباقي

---

٤ $د(س) = س - ٢ جتا س$ في $٠ < س < ٢\pi$

الحل

المجال = $]٠، ٢\pi[$

$د'(س) = ١ + ٢ جا س$

بوضع $د'(س) = ٠$

$١ + ٢ جا س = ٠$ ، $٢ جا س = -١$

جا س = $-\frac{١}{٢}$ ، الثالث أو الرابع

$١٨٠ + ٣٠^\circ$ ، $٣٦٠ - ٣٠^\circ$

س ∈ {٢١٠°، ٣٣٠°}

أكمل الباقي

---

٥ $د(س) = ٢ لو_هـ س - س^٢$

الحل

المجال $ح^+$

$د'(س) = \frac{٢}{س} - ٢س$

$د'(س) = ٠$

$\frac{٢}{س} - ٢س = ٠$

$٢ - ٢س^٢ = ٠$

$٢س^٢ = ٢$

$س^٢ = ١$

$س^2 = ١$ ∴ $س = \pm ١$

$س = -١ \notin$ مجال مرفوض

∴ $س = ١$ نقطة حرجة

عند $س = ١$ قيمة عظمى محلية $(١ ، -١)$

الدالة تزايدية فى $]٠ ، ١[$

وتناقصية فى $]١ ، \infty[$

---

٦ اثبت أن $د(س) = ظاس - س$ متزايدة فى $]٠ ، \frac{\pi}{٤}[$

الحل

فاكرها

$د'(س) = قا^2س - ١ = ظا^2س$

∴ لكل $س \in]٠ ، \frac{\pi}{٤}[$ فإن $ظا^2س > ٠$

∴ لكل $س \in]٠ ، \frac{\pi}{٤}[$ فإن $د'(س) > ٠$

∴ $د(س)$ متزايدة فى $]٠ ، \frac{\pi}{٤}[$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة

٧ $د(س) = س^3 - ١٢س + ١٢$ $[-٣ ، ٣]$

الحل

$د'(س) = ٣س^2 - ١٢$

$د'(س) = ٠$ $٣س^2 = ١٢$

$س^2 = ٤$

∴ $س = \pm ٢ \in [-٣ ، ٣]$

$د(-٣) = ٢١$

$د(-٢) = ٢٨$ عظمى مطلقة

$د(٢) = -٤$ صغرى مطلقة

$د(٣) = ٣$

∴ $(-٢ ، ٢٨)$ عندها عظمى مطلقة

$(٢ ، -٤)$ عندها صغرى مطلقة

---

٨ $د(س) = جاس + جتاس$ $[٠ ، ٢\pi]$

الحل

$د'(س) = جتاس - جاس$

$د'(س) = ٠$ جتاس = جاس

$\frac{جاس}{جتاس} = ١$ ∴ $ظاس = ١$ موجبة

الأول الثالث

عند ٤٥° ، ٢٢٥°

$١٨٠ + ٤٥$

حدود الدالة الأصلية

$د(٠) = ١$

$د(٤٥) = \sqrt{٢}$ عظمى مطلقة

$د(٢٢٥) = -\sqrt{٢}$ صغرى مطلقة

$د(٣٦٠) = ١$

$(\frac{\pi}{٤} ، \sqrt{٢})$ قيمة عظمى مطلقة

$(\frac{٥\pi}{٤} ، -\sqrt{٢})$ قيمة صغرى مطلقة

(٩) يكون للدالة د قيمة صغرى محلية إذا كانت د(س) = ...

(أ) $٢س - ١$ (ب) $س^٢ + ١$

(ج) $س^٣$ (د) $- س^٣$

الحل

عندما $د'(س) = ٢س$ ، $(س = ٠)$

$د''(س) = ٢$ (+) صغرى محلية

---

(١٠) يكون للدالة د قيمة عظمى محلية إذا كانت د(س) = ...

(أ) $س^٤ - ٣$ (ب) $س^٣ + ١$

(ج) $س^٣ + ٣س$ (د) $س^٤ - ٣س^٣$

---

(١١) إذا كانت $د'(س) = أس + ب$ حيث $أ < ٠$ ابحث وجود قيمة قصوى للدالة مبيناً نوعها إن وجدت

الحل

$د'(س) = أس + ب$

$د'(س) = ٠$ عند $س = \frac{-ب}{أ}$

، $د(س) = \int د'(س) \, ءس$

$= \frac{أ}{٢} س^٢ + ب س + ث$

دالة تربيعية فيها $أ < ٠$

حيث مفتوح لأسفل ولها قيمة عظمى مطلقة عند $س = \frac{-ب}{أ}$

---

(١٢) أوجد القيم القصوى

$$د(س) = \begin{cases} س^٣ - ٣س^٢ & ، س \le ٠ \\ س^٢ - ٢س & ، س > ٠ \end{cases}$$

$[-٣ ، ٣]$

الحل

$$د'(س) = \begin{cases} ٣س^٢ - ٦س = ٠ \\ ٢س - ٢ = -٢ \end{cases}$$

∵ $د'(٠^+) \ne د'(٠^-)$

∴ $د'(٠)$ غير موجودة

∴ عند $س = ٠$ قيمة حرجة

$$د'(س) = \begin{cases} ٣س^٢ - ٦س & ، س < ٠ \\ \text{غير موجودة} & ، (س = ٠) \\ ٢س - ٢ & ، س > ٠ \end{cases}$$

نوضع $د'(س) = ٠$ عندما $س < ٠$

$٣س^٢ - ٦س = ٠$

$٣س(س - ٢) = ٠$

$س = ٠$ لا يحقق أو $س = ٢$ لا تحقق

نوضع $د'(س) = ٠$ عندما $س > ٠$

$٢س - ٢ = ٠$ ، $٢س = ٢$

∴ $(س = ١)$ يحقق ، $د ∈]-٣ ، ٣[$

∴ نقطة حرجة

د(-٣) = صفر

د(٠) = صفر

د(١) = -١ صغرى مطلقة

د(٣) = ٣ عظمى مطلقة

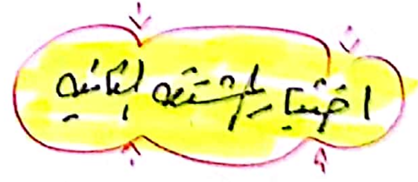


يقال لجزء متصل من منحنى انه محدب إلى أعلى (مقعر لأسفل) إذا كانت يقع أسفل جميع مماساته

محدب إلى أسفل (مقعر لأعلى) إذا كانت يقع أعلى جميع مماساته

إذا كانت دَ متزايدة محدب لأسفل

دَ متناقصة محدب لأعلى



دً(س) > ٠ محدب لأسفل

دً(س) < ٠ محدب لأعلى

* نقطة الإنقلاب نحصل عليها بوضع دً(س) = ٠ وتتغير الإشارة قبلها عن بعدها تفصل بين التحدب لأعلى ولأسفل



عين فترات التحدب لأعلى ولأسفل ونقط الإنقلاب إن وجدت

(١) د(س) = -س^٤ + ٦ س^٣

المجال = ح

دَ(س) = -٤ س^٣ + ١٨ س^٢

دً(س) = -١٢ س^٢ + ٣٦ س

بوضع دً(س) = ٠

-١٢ س (س - ٣) = ٠

إما س = ٠ أو س = ٣

س		٠		٣	
د(س)	محدب لأعلى ∩		محدب لأسفل ∪		∩
دً(س)	- - -		+ + + +		- - -

محدب لأعلى في]-∞، ٠[،]٣، ∞[

ومحدب لأسفل في]٠، ٣[

وله نقط انقلاب (٠، ٠) ، (٣، ٨١)

② عين التحدب ونقط الانقلاب

$د(س) = \sqrt[3]{(س-٤)^{٢}}$

المجال = ح

$د(س) = (س-٤)^{\frac{٢}{٣}}$

$دَ(س) = \frac{٢}{٣}(س-٤)^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣\sqrt[3]{س-٤}}$

دَ(٤) غير معرفة [عندها المماس رأسي]

$دً(س) = \frac{-٢}{٩}(س-٤)^{-\frac{٤}{٣}}$

$= \frac{-٢}{٩\sqrt[3]{(س-٤)^{٤}}}$

دً(٤) غير معرفة عند س = ٤

س — ٤
د(س)
دً(س) — - - - - — غير معرفة — - - - -

المنحنى محدب لأعلى في $]-\infty ، ٤[$ ، $]٤ ، \infty[$

وليس له نقط انقلاب

③ $د(س) = |س^{٣} - ١|$

طبقاً المجال ح هنحل اشارة تعريف

$د(س) = \begin{cases} س^{٣} - ١ & ، س \geq ١ \\ -س^{٣} + ١ & ، س < ١ \end{cases}$

$دَ(١) = \begin{cases} ٣س^{٢} = ٣ & س > ١ \\ -٣س^{٢} = -٣ & س < ١ \end{cases}$

$\because دَ(١)^{+} \neq دَ(١)^{-}$

∴ دَ(١) غير موجودة [نقطة حرجة]

$دَ(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & س > ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ -٣س^{٢} & س < ١ \end{cases}$

$دً(س) = \begin{cases} ٦س & س > ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ -٦س & س < ١ \end{cases}$

بوضع دً(س) = ٠

عندما س > ١ ٦س = ٠ ∴ س = ٠ مرفوض

عندما س < ١ -٦س = ٠ ∴ س = ٠ يحقق

لاحظ أن عند س = ١ نقطة حرجة ولكن لا تعتبر نقطة انقلاب لأن عندها المشتقة الأولى كانت غير موجودة لأن عندها أكثر من مماس ناتج من عدم تساوي المشتقة اليمنى مع اليسرى عندها

س — ٠ — ١
د(س)
دً(س) — + + + — - - - - — + + +

اكتب فترات التحدب

يوجد نقطة انقلاب عند (٠ ، ١)



① إذا كانت د̈ غير موجودة وذلك لأنها جت من قسمة فعند النقطة دى نقطة انقلاب عادى

② ولكن إذا كانت د̈ غير موجودة وذلك لأنها جت من داله مقياس أو داله متعددة التعريف وكانت النهاية اليمنى ≠ اليسرى فعند هذه النقطة ليست نقطة انقلاب

④ منحنى الداله د محدباً لأسفل فى ح إذا كانت د(س) = ----

Ⓐ ٣ − س^٢ Ⓑ ٣ − س^٣
Ⓒ ٣ − س^٤ Ⓓ ٣ + س^٤

الحل

لأنه د̈(س) = ٤ س^٣
د̈(س) = ١٢ س^٢ موجبة دائماً
يبقى محدب لأسفل دائماً

⑤ منحنى الداله د(س) = س^٣ − ٣ س^٢ + ٢ محدب لأعلى عندما س ∈ ----

Ⓐ]−∞ ، ٠[Ⓑ]−∞ ، ١[
Ⓒ]١ ، ٣[Ⓓ]١ ، ∞[

⑥ منحنى الداله يكون محدباً لأسفل فى فترة إذا كان ---.

Ⓐ د̀(س) < ٠ Ⓑ د̀(س) > ٠
Ⓒ د̈(س) > ٠ Ⓓ د̈(س) < ٠

⑦ منحنى الداله د(س) = (س − ٢) هـ^س يكون محدباً لأسفل فى الفترة.

Ⓐ]−∞ ، ∞[Ⓑ]−١ ، ٢[
Ⓒ]٠ ، ٢[Ⓓ]٠ ، ∞[

⑧ إذا كان د(س) = (أ − ٢) س^٤ + ٣ س − ٥ ، س ∈ ح فإن منحنى الداله مقعراً لأسفل عندما ---.

Ⓐ أ > ٢ Ⓑ أ < ٢
Ⓒ أ = ٢ Ⓓ أ = ٠

الحل

مقعر لأسفل يعنى محدب لأعلى ∩
ودى داله تربيعية بتكون لهافيه غلق إذا كان معامل س^٤ سالب أ − ٢ < ٠
∴ أ < ٢ #.

⑨ إذا كانت (١ ، ٢) نقطة انقلاب لمنحنى د(س) = أ س^٣ + ب س^٢ فأوجد قيم أ ، ب الحقيقية

حل أنت

الحل

توضيح

(١ ، ١٢) نقطة انقلاب ودوله

فما تعنيه هما

① (١ ، ١٢) نقطة ∈ لمنحنى الدالة

② $د''(س)$ عند $س = ١$ تساوى صفر

عندها المشتقة الثانية = صفر

$د(س) = أس^{٣} + بس^{٢}$

$د'(س) = ٣أس^{٢} + ٢ب س$

$د''(س) = ٦أس + ٢ب$

عند $س = ١$ ، $د''(س) = ٠$

$٦أ + ٢ب = ٠$

$\boxed{٣أ + ب = ٠} \leftarrow (١)$

بالتعويض فى معادلة المنحنى بالنقطة (١ ، ١٢)

$أ(١)^{٣} + ب(١)^{٢} = ١٢$

$أ + ب = ١٢ \leftarrow (٢)$ بالطرح

$٣أ + ب = ٠$

$-٢أ = ١٢$ ∴ $\boxed{أ = -٦}$

بالتعويض فى ①

∴ $-١٨ + ب = ٠$

∴ $\boxed{ب = ١٨}$

---

(١٠) إذا كانت $ص = د(س)$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة وكانت $د''(س) > ٠$ عندما $س < \frac{٢}{٣}$ ، $د''(س) < ٠$ عندما $س > \frac{٢}{٣}$

ويمر منحنى الدالة ب (١ ، ٦) وتوجد نقطة حرجة عند (-١ ، ٢) أوجد معادلة المنحنى وبين نوع النقط الحرجة

الحل

نفرض أن $د(س) = أس^{٣} + بس^{٢} + جـ س + ء$

يمر بالنقط (١ ، ٦) ، (-١ ، ٢)

له نقطة انقلاب عند $س = \frac{٢}{٣}$

$د'(س) = ٣أس^{٢} + ٢ب س + جـ$

$د''(س) = ٦أس + ٢ب$

∵ $د''(\frac{٢}{٣}) = ٠$ ∴ $٦أ \times \frac{٢}{٣} + ٢ب = ٠$

$-٤أ + ٢ب = ٠$

$\boxed{ب = ٢أ} \leftarrow ①$

له نقطة حرجة عند $س = -١$ ، $د'(س) = ٠$

$٣أ(-١)^{٢} + ٢ب(-١) + جـ = ٠$

$٣أ - ٢ب + جـ = ٠$

$٣أ - ٤أ + جـ = ٠$

$-أ + جـ = ٠$

∴ $\boxed{جـ = أ} \leftarrow ②$

بالتعويض ب (١ ، ٦) ، (-١ ، ٢) فى معادلة المنحنى

* $أ + ب + جـ + ء = ٦$

$أ + ٢أ + أ + ء = ٦$ ∴ $\boxed{ء = ٦ - ٤أ}$ ③

* $-أ + ب - جـ + ء = ٢$

$-أ + ٢أ - أ + ٦ - ٤أ = ٢$

∴ $\boxed{أ = ١}$

$\therefore$ أ = ١ ، ب = ٢ ، هـ = ١ ، د = ٢

$\therefore$ د(س) = س^٣ + ٢س^٢ + س + ٢

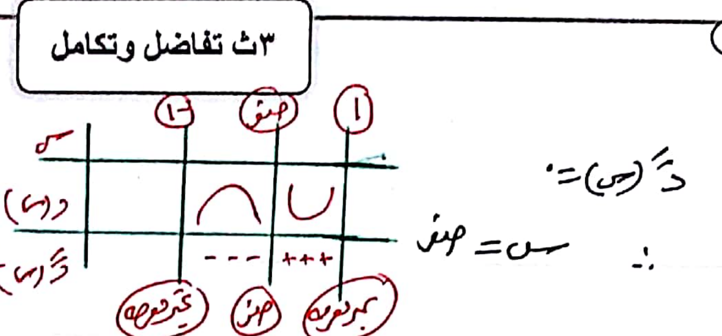
د′(س) = ٣س^٢ + ٤س + ١

د′(س) = ٠

$\therefore$ س = $-\frac{1}{3}$ أو −١

د″$(-\frac{1}{3})$ > ٠ صغرى محلية

د″(−١) < ٠ عظمى محلية



$\therefore$ نقطة الانقلاب هي (٠، ٠)

الميل عندها = د′(٠) = ١

$\therefore$ قياس الزاوية التي يصنعها المماس

= ظا^{-١}(١) = $\frac{\pi}{4}$

---

(11) اثبت أن قياس زاوية ميل المماس عند نقطة الانقلاب د(س) = $\frac{س}{١ - س^٢}$ هو $\frac{\pi}{4}$

الحل

د(س) = $\frac{س}{١ - س^٢}$ المجال ح − {±١}

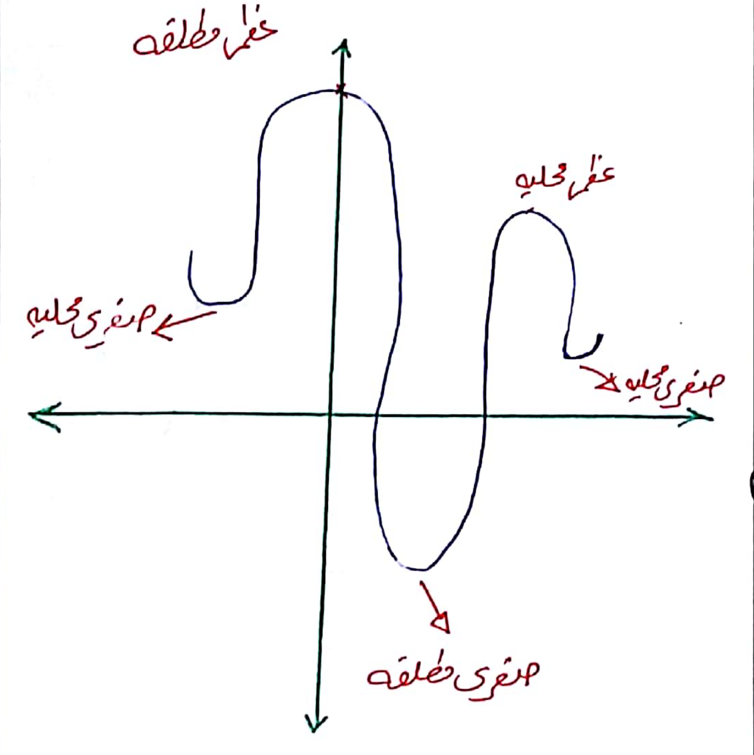
د′(س) = $\frac{(١ - س^٢) - س(-٢س)}{(١ - س^٢)^٢}$ = $\frac{١ + س^٢}{(١ - س^٢)^٢}$

د″(س) = $\frac{(١ - س^٢)^٢(٢س) - (١ + س^٢) × ٢(١ - س^٢)(-٢س)}{(١ - س^٢)^٤}$

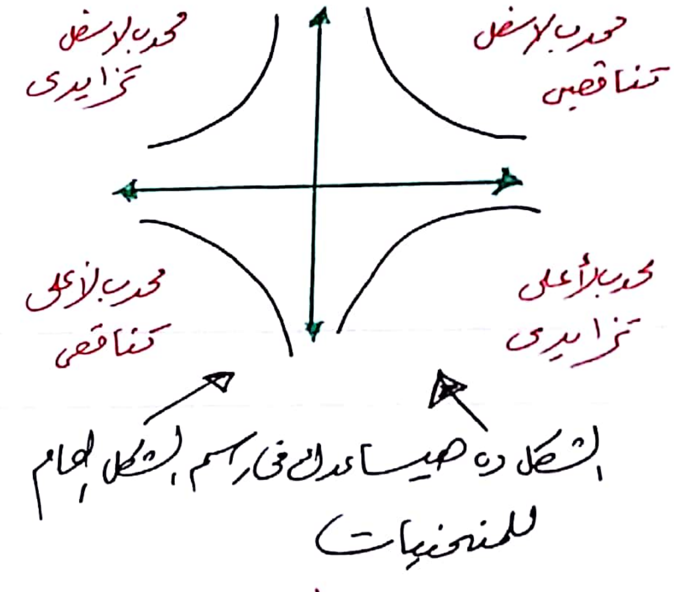
= $\frac{(١ - س^٢)[(١ - س^٢)(٢س) + ٤س(١ + س^٢)]}{(١ - س^٢)^٤}$

= $\frac{٢س - ٢س^٣ + ٤س + ٤س^٣}{(١ - س^٢)^٣}$

د″(س) = $\frac{٢س^٣ + ٦س}{(١ - س^٢)^٣}$







الشكل دا هيساعدك فى رسم الشكل العام للمنحنيات



(١) ارسم شكل عام للمنحنى د حيث

$د(س) = ٢س^٣ - ٩س^٢ + ١٢س - ٢$

الحل

$د'(س) = ٦س^٢ - ١٨س + ١٢$

$د''(س) = ١٢س - ١٨$

بوضع $د'(س) = ٠$ $س^٢ - ٣س + ٢ = ٠$

∴ $س = ١$ ، $س = ٢$

$د''(١) = -٦$ عظمى محلية $(١ ، ٣)$

$د''(٢) = ٦$ صغرى محلية $(٢ ، ٢)$

بوضع $د''(س) = ٠$

$١٢س = ١٨$ ∴ $س = \frac{٣}{٢}$

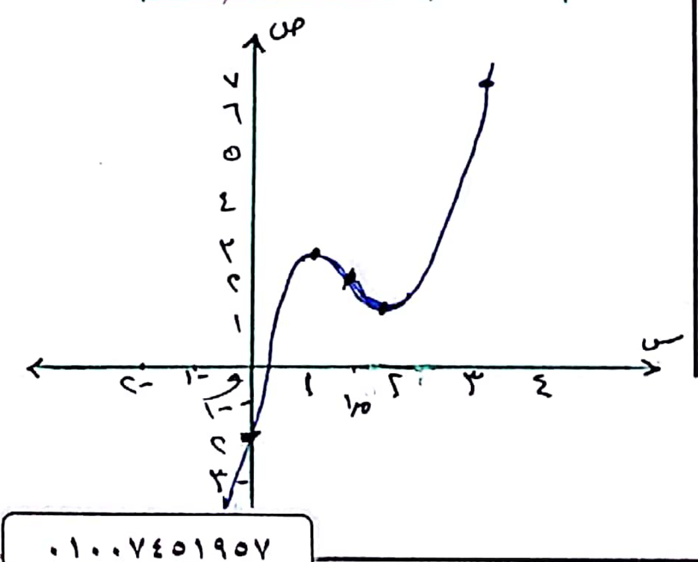
س		$\frac{٣}{٢}$	
د(س)		∩	∪
د''(س)		− − − − ٠	+ + +

∴ عند $(\frac{٣}{٢} ، \frac{٥}{٢})$ نقطة انقلاب

نوجد نقط مساعدة مثل التقاطع مع محور الصادات مثلاً بوضع $س = ٠$

∴ $ص = -٢$ نوجد $د(٣) = ٧$

س	ص	نوع النقطة
٠	−٢	تقاطع مع محور الصادات
١	٣	عظمى محلية
$\frac{٣}{٢}$	$\frac{٥}{٢}$	نقطة انقلاب
٢	٢	صغرى محلية
٣	٧	نقطة



② ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة التى لها الخواص فى كل مما يأتى:

أولاً: متصلة ومجالها [١، ٧]

د(١) = -٢ ، د(٥) = ٤

ثانياً: دَ(٥) = ٠ ← نقطة حرجة

دَ(س) > ٠ س < ٥ ← تزايدية

دَ(س) < ٠ س > ٥ تناقصية

∴ ٥ عظمى محلية

ثالثاً: دً(س) < ٠ عندما ١ < س < ٧

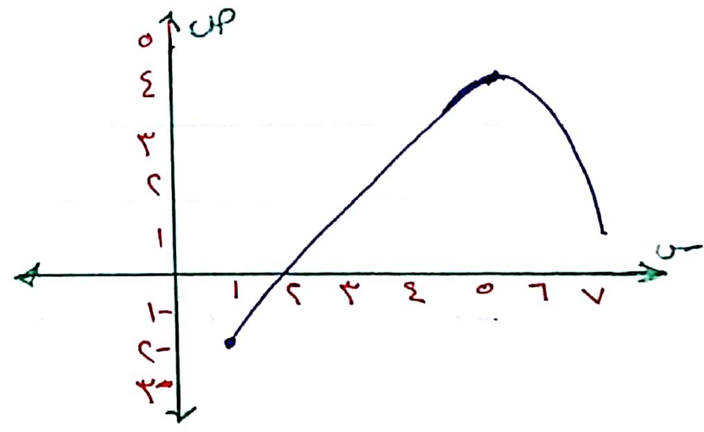
← محدب لأعلى دائماً

الحل

عند ٥ قيمة عظمى محلية (نقطة حرجة)

قبلها تزايد وبعدها تناقص

والمنحنى محدب لأعلى فى الفترة]١، ٧[



③ ارسم الشكل العام لمنحنى د الذى:

د(١) = د(٥) = ٠ ، د(٢) = -٣

دَ(س) < ٠ عندما س < ٢

دَ(س) > ٠ عندما س > ٢

دً(س) < ٠ لكل س ≠ ٢

الحل

المنحنى يمر بالنقط

(١، ٠) ، (٥، ٠) ، (٢، -٣)

المنحنى محدب لأعلى دائماً لأن دً(س) < ٠

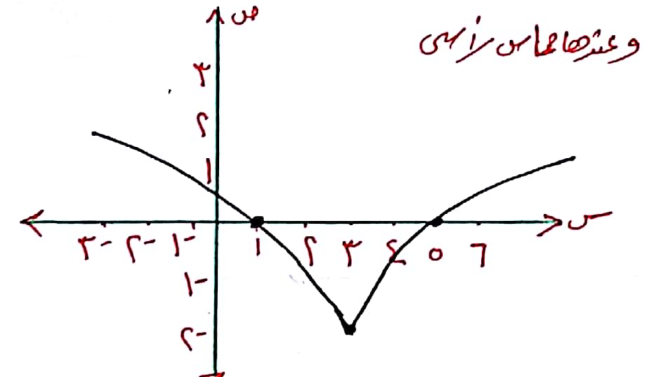
عند س = ٢ صغرى محلية لأن قبلها تناقص وبعدها تزايد

∴ الشكل العام

يكون قبل ٢ محدب لأعلى تناقص

وبعد ٢ محدب لأعلى تزايدى

وعندها مماس رأسى



④ الحل

① مجال د = [-٤ ، ٥]

② د(س) = ٠ عندما س ∈ ---- {-٢ ، ٢}

③ د″(س) > ٠ عندما س ∈ ----]٠ ، ٥[محدب لأسفل

④ المنحنى محدب لأعلى عندما س ∈ ----]-٤ ، ٠[

⑤ نقطة الانقلاب هى (٠ ، ٠)

⑥ القيمة الصغرى المحلية عند س = ٢

⑦ القيمة العظمى المطلقة = ٨

⑤ يوضح الشكل المقابل منحنى د′(س)

الحل

① للدالة نقط حرجة عند س = ... ، ......

د′(س) = ٠ عند س = ٠ ، س = ٢

∴ النقط الحرجة عند س = ٠ ، ٢

② الدالة تزايدية فى]٠ ، ٢[الجزء الأعلى

③ وتناقصية فى]-∞ ، ٠[∪]٢ ، ∞[الجزء الأسفل

④ للدالة نقطة انقلاب عند س = ...

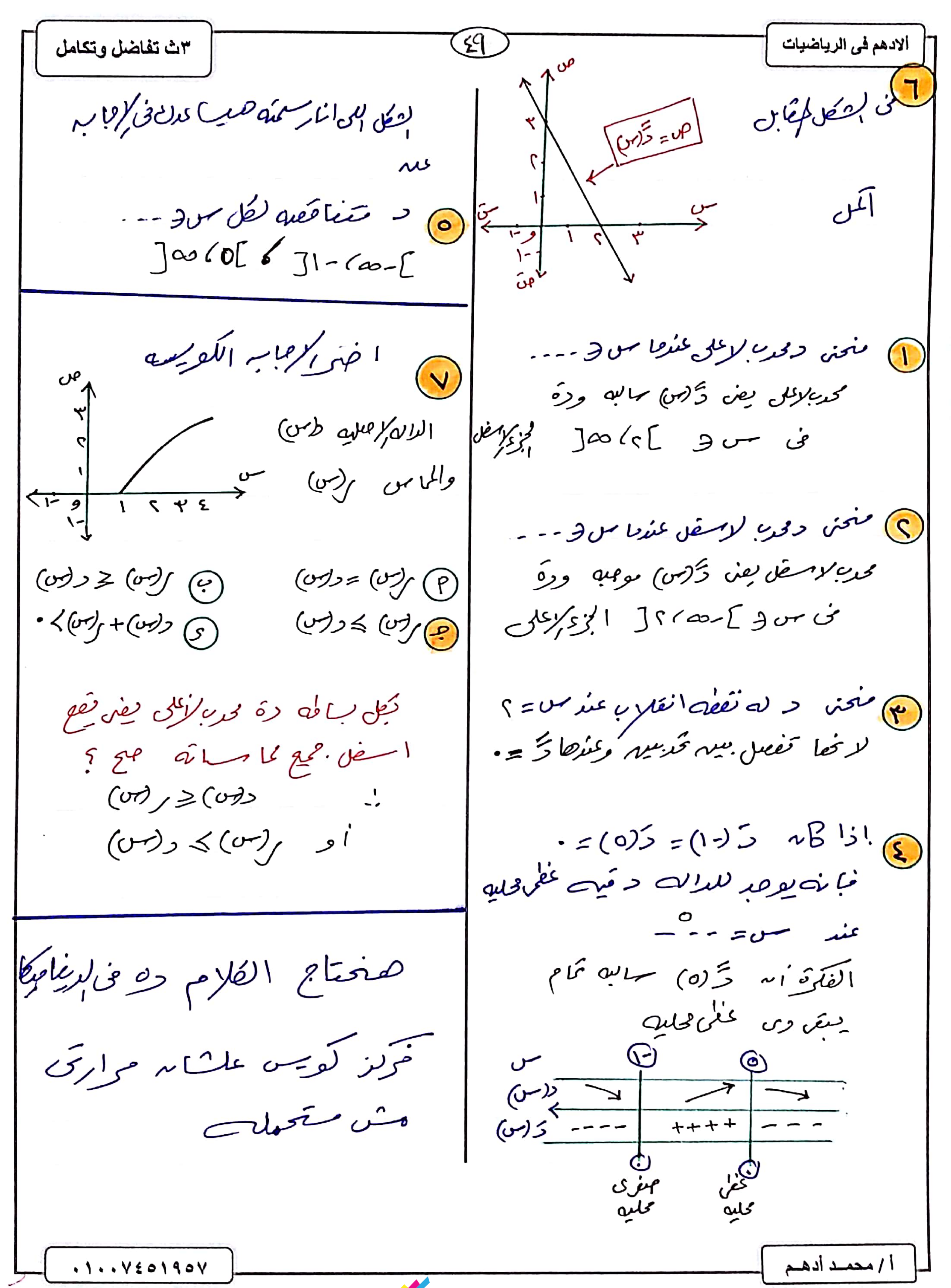
عند س = ١ مماس أفقى للمشتقة الأولى

∴ د″(س) = صفر عندها نقطة انقلاب

⑤ التحدب لأعلى فى]١ ، ∞[لأن المشتقة الثانية عندها سالبة [ميل سالب]

⑥ التحدب لأسفل فى]-∞ ، ١[لأن المشتقة الثانية موجبة [ميل موجب]

⑦ مجموعة حل المتباينة د″(س) > ٠ هى ----]-∞ ، ١[المشتقة الثانية موجبة



٦ في الشكل المقابل

أكمل

١ منحنى د محدب لأعلى عندما س ∈ ....

محدب لأعلى يعني دَ(س) سالبة ودة

في س ∈]٢ ، ∞[الجزء الأسفل

٢ منحنى د محدب لأسفل عندما س ∈ ....

محدب لأسفل يعني دَ(س) موجبة ودة

في س ∈]-∞ ، ٢[الجزء الأعلى

٣ منحنى د له نقطة انقلاب عند س = ٢

لأنها تفصل بين تحدبين وعندها دً = ٠

٤ إذا كان دَ(-١) = دَ(٥) = ٠

فإنه يوجد للدالة د قيمة عظمى محلية

عند س = ٥

الفكرة إنه دً(٥) سالبة تمام

يبقى دي عظمى محلية

الشكل اللي انا رسمته هيبقى عدل في الإجابة

٥ د متناقصة لكل س ∈ ....

]-∞ ، -١[،]٥ ، ∞[

٧ اختر الإجابة الصحيحة

الدالة الأصلية د(س)

والمماس ر(س)

(أ) ر(س) = د(س)

(ب) ر(س) ≥ د(س)

(ج) ر(س) ≤ د(س)

(د) د(س) + ر(س) > ٠

شكل سالبة دة محدب لأعلى يعني يقع أسفل جميع مماساته صح ؟

ر(س) ≥ د(س)

أو ر(س) ≤ د(س)

هنحتاج الكلام ده في الديناميكا

فركز كويس علشان مراجعتي مش مستحملة

الدرس السادس

تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

الخطوات

1. تحديد المطلوب ورسم المسألة إذا أمكن
2. تحديد العلاقة الأساسية من المطلوب.
3. نجعلها في متغير واحد
4. نوجد د(س) ونختبر القيم العظمى
5. والصغرى بأي طريقة

المسائل



(١) عددان مجموعهما ٣٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن أوجد العددين

الحل

العددان هما س ، ص

س + ص = ٣٠

ص = ٣٠ − س

∴ العددان هما س ، ٣٠ − س

حاصل ضربهما

د(س) = س (٣٠ − س)

د(س) = ٣٠ س − س²

د'(س) = ٣٠ − ٢ س

بوضع د'(س) = ٠

∴ ٣٠ = ٢ س ∴ س = ١٥

د''(س) = −٢ ، د''(١٥) < ٠ قيمة عظمى

∴ عند س = ١٥ أكبر ما يمكن

∴ العددان هما ١٥ ، ١٥

---

(٢) خلية على شكل متوازي مستطيلات، قاعدتها مربعة، إذا كان مجموع جميع أحرفها = ٢٤٠ سم أوجد أبعادها حتى يصير حجمها أكبر ما يمكن

الحل

الأحرف س ، س ، ص

٤ س + ٤ س + ٤ ص = ٢٤٠

٨ س + ٤ ص = ٢٤٠

٢ س + ص = ٦٠

∴ ص = ٦٠ − ٢ س

الحجم = س × س × ص = س² ص

د(س) = س² (٦٠ − ٢ س)

د(س) = ٦٠ س² − ٢ س³

د'(س) = ١٢٠ س − ٦ س²

عند د'(س) = ٠ ∴ س = ٠ (مرفوض) أو س = ٢٠

٦ س (٢٠ − س) = ٠

$\hat{د}(٢٠)$ ح. عندها أكبر ما يمكن

∴ س = ٢٠ / ص = ٦٠ - ٢ × ٢٠ = ٢٠

∴ الأبعاد (٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠) سم

---

③ رسم مستطيل بحيث يقع رأسان فيتجاوران منه على المنحنى ص = س^{٢} - ١٢ والرأسان الآخران على المنحنى ص = ١٢ - س^{٢} أوجد أكبر مساحة لهذا المستطيل

الحل

أ تقع على المنحنى الأعلى

أ (س ، ١٢ - س^{٢})

ب تقع على المنحنى الأسفل

ب (س ، س^{٢} - ١٢)

الطول = ٢س

العرض = ٢٤ - ٢س^{٢}

مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ٢س (٢٤ - ٢س^{٢})

د(س) = ٤٨س - ٤س^{٣}

$\acute{د}$(س) = ٤٨ - ١٢س^{٢}

بوضع $\acute{د}$(س) = ٠

١٢س^{٢} = ٤٨ ∴ س^{٢} = ٤

∴ س = ± ٢

$\hat{د}$(س) = - ٢٤س

$\hat{د}$(-٢) = + قيمة صغرى محلية أصغر ما يمكن

$\hat{د}$(٢) = - قيمة عظمى محلية أكبر ما يمكن

∴ عند س = ٢ تكون المساحة أكبر ما يمكن

∴ المساحة هـ

٤٨ × ٢ - ٤ × (٢)^{٣} = ٦٤ وحدة مربعة

---

④ أكبر قيمة للمقدار : ٨س - س^{٢}

حيث س ∈ ح هـ ....

(٨ ، ٤ ، ١٦ ، ٤ ، ٣٢ ، ٦٤)

$\frac{دص}{دس}$ = ٨ - ٢س

بوضع $\acute{د}$(س) = ٠ ٢س = ٨

∴ س = ٤

$\hat{د}$(س) = -٢ $\hat{د}$(٤) = -٢ أكبر ما يمكن

∴ ٨س - س^{٢} = ٨ × ٤ - (٤)^{٢} = ١٦



القطاع الدائرى

المساحة = $\frac{1}{2}$ ل نق

= $\frac{1}{2}$ نق^2 هـ^د

= $\frac{س^\circ}{360^\circ} \times \pi$ نق^2

المحيط = ٢ نق + ل

---

(٥) قطاع دائرى مساحته ١٦ سم^2 أوجد طول نصف قطر دائرته الذى يجعل محيطه أقل ما يمكن. وما قياس زاويته عندئذ؟

ث ج ٢٠١٨

الحل

نصف القطر = نق وطول القوس = ل

م = $\frac{1}{2}$ ل نق

$\frac{1}{2}$ ل × نق = ١٦ ∴ ل = $\frac{32}{نق}$

المحيط = ل + ٢نق

= $\frac{32}{نق}$ + ٢نق = $\frac{32}{نق}$ + ٢نق

= ٣٢ نق$^{-1}$ + ٢ نق

د َ = −٣٢ نق$^{-2}$ + ٢

= ٢ − $\frac{32}{نق^2}$

بوضع د َ = ٠ ∴ $\frac{32}{نق^2}$ = ٢ ∴ نق = ±٤

د َ = ٦٤ نق$^{-3}$

د َ َ (٤) > ٠ صغرى محلية [أصغر ما يمكن]

∴ عند نق = ٤ سم يكون المحيط أصغر ما يمكن

ويكون ل = $\frac{32}{نق}$ = $\frac{32}{4}$ = ٨ سم

هـ^د = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{8}{4}$ = ٢^د

---

(٦) فى مستوى إحداثى متعامد رسم $\overleftrightarrow{أب}$ يمر بالنقطة جـ (٣، ٢) ويقطع محورى الإحداثيات فى أ ، ب على الترتيب أثبت أنه أصغر مساحة للمثلث أ و ب = ١٢ وحدة مربعة

الحل

أ و = س   د و = ٣   أ د = س − ٣

من التشابه

$\frac{أد}{أو} = \frac{جد}{بو}$

$\frac{س-3}{س} = \frac{2}{ص}$

∴ ص = $\frac{2س}{س-3}$ م = $\frac{1}{2}$ × س × ص

المساحة م = د(س) = $\frac{1}{2}$ × س $\left(\frac{2س}{س-3}\right)$

د(س) = $\frac{س^2}{س-3}$

د َ = $\frac{2س(س-3) - س^2 \times 1}{(س-3)^2}$ = $\frac{س^2 - 6س}{(س-3)^2}$

∴ د َ = ٠ ∴ س(س − ٦) = ٠

س = ٠ مرفوض أو س = ٦ أصغر ما يمكن

∴ أصغر مساحة = $\frac{36}{6-3}$ = ١٢ وحدة مربعة

(٧) أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف إلى مقلوبه الضربى كان الناتج أصغر ما يمكن

الأزهر ٢٠١٨

الحل

نفرض أن العدد هو $س$ حيث $س > ٠$

∴ مقلوبه الضربى $\frac{١}{س}$

ومجموعهما

$ص = س + \frac{١}{س}$

$ص' = ١ - \frac{١}{س^٢}$

بوضع $ص' = ٠$

∴ $١ - \frac{١}{س^٢} = ٠$

$\frac{١}{س^٢} = ١$ ∴ $س^٢ = ١$

∴ $س = ±١$ أو -١ مرفوض

∴ $ص' = ١ - س^{-٢}$

$ص'' = ٢ س^{-٣}$

$ص''(١) = ٢$ موجبة يعنى أصغر ما يمكن قيمة صغرى

∴ العدد هو "١"

(٨) حقل مفتوح يحده من أحد الجوانب نهر مستقيم ، حدد كيفية وضع سياج حول الجوانب الأخرى من قطعة أرض مستطيلة من الحقل للإحاطة بأكبر مساحة ممكنة بواسطة ٨٠٠ م من السياج وما مساحة هذه الأرض حينئذ ؟

الحل

نهر

(مستطيل أبعاده $س$ ، $س$ ، $ص$)

$٢س + ص = ٨٠٠$

$ص = ٨٠٠ - ٢س$

المساحة

$م = س × ص$

$م = س(٨٠٠ - ٢س)$

$م = ٨٠٠س - ٢س^٢$

$م' = ٨٠٠ - ٤س$

بوضع $م' = ٠$ $٨٠٠ - ٤س = ٠$

$٤س = ٨٠٠$ ∴ $س = ٢٠٠$ م

$م'' = -٤$ ∴ $م''(٢٠٠) = -٤ < ٠$

قيمة عظمى

عند $س = ٢٠٠$ ، $ص = ٨٠٠ - ٤٠٠ = ٤٠٠$ م

أكبر مساحة $= ٢٠٠ × ٤٠٠ = ٨٠٠٠٠$ م^٢

(٩) أوجد أقرب نقطة إلى $(٠ ، ٥)$ وتقع على المنحنى $ص = \frac{١}{٢}س^٢ - ٤$

الحل

نفرض أن النقطة $(س ، ص)$ تقع على المنحنى

$ص = \frac{١}{٢}س^٢ - ٤$

∴ النقطة هى $(س ، \frac{١}{٢}س^٢ - ٤)$

البعد بين نقطتين

$ف = \sqrt{(س - ٠)^٢ + (\frac{١}{٢}س^٢ - ٤ - ٥)^٢}$

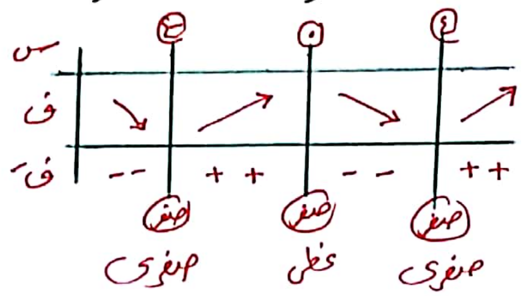
$= \sqrt{س^٢ + \frac{١}{٤}س^٤ - ٩س^٢ + ٨١}$

$ف = \sqrt{\frac{١}{٤}س^٤ - ٨س^٢ + ٨١}$

$$ف' = \frac{س^3 - 16س}{2\sqrt{\frac{1}{4}س^4 - 8س^2 + 81}}$$

بوضع ف′ = ٠ : س(س² − ١٦) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ٤ أو س = −٤



ف أقل ما يمكن عند س = −٤ ، ٤

∴ أقرب نقطة هي (−٤ ، ٤) ، (٤ ، ٤)

(١٠) أوجد بعدي مستطيل له أكبر مساحة ممكنة رسمه داخل مثلث ، طول قاعدته ١٦ سم وارتفاعه ١٢ سم ، بحيث ينطبق بأحد أضلاعه على قاعدة المثلث وتقع رأسا الضلع المقابل على الضلعين الآخرين للمثلث .

الحل

ΔΔ أهو ، أبج متشابهان

تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة وارتفاعها

$$\frac{ص}{16} = \frac{أن}{أل} = \frac{12 - س}{12}$$

$$ص = \frac{16}{12}(12 - س)$$

$$ص = 16 - \frac{4}{3}س$$

مساحة المستطيل م = س ص

$$م = س \times (16 - \frac{4}{3}س)$$

$$م = 16س - \frac{4}{3}س^2$$

$$م' = 16 - \frac{8}{3}س$$

بوضع م′ = ٠ ، $\frac{8}{3}س = 16$

$$∴ س = \frac{16 \times 3}{8} = 6$$

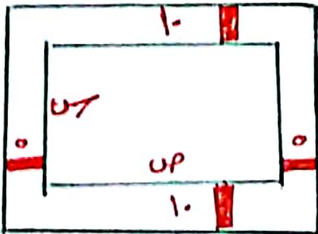
$م'' = -\frac{8}{3}$ قيمة عظمى

∴ بعدا المستطيل = ٦ ، $16 - \frac{4}{3} \times 6 = 8$

= ٦ ، ٨ سم

(١١) يراد تصميم ملصق مستطيل الشكل يحتوي على ٨٠٠ سم² من المادة المطبوعة بحيث يكون عرض كل من الهامشين العلوي والسفلي ١٠ سم ، وكل من الهامشين الجانبيين ٥ سم ، ما بعدا الملصق اللذان يجعلان مساحته أصغر ما يمكن

الحل



مساحة المطبوع

س ص = ٨٠٠

$$∴ ص = \frac{800}{س}$$

مساحة المستطيل

$= (س + ٢٠)(ص + ١٠)$

$م = (س + ٢٠)\left(\frac{٨٠٠}{س} + ١٠\right)$

$\downarrow$ ١ ، $\downarrow$ $\frac{-٨٠٠}{س^٢}$

$م' = \frac{-٨٠٠}{س^٢}(س + ٢٠) + \frac{٨٠٠}{س} + ١٠$

$م' = \frac{-٨٠٠}{س} - \frac{١٦٠٠٠}{س^٢} + \frac{٨٠٠}{س} + ١٠$

$م' = ١٠ - \frac{١٦٠٠٠}{س^٢}$

بوضع $م' = ٠$

$\frac{١٦٠٠٠}{س^٢} = ١٠$

$١٠ س^٢ = ١٦٠٠٠$

$س = ٤٠$

$م''(٤٠) > ٠$ قيمة صغرى

∴ بعدا المستطيل هما

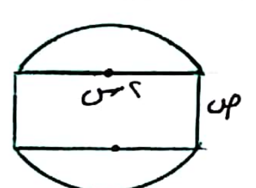
$(س + ٢٠)$ ، $\left(\frac{٨٠٠}{س} + ١٠\right)$

٦٠ ، $١٠ + \frac{٨٠٠}{٤٠} = ٣٠$

٦٠ ، ٣٠ سم

(١٢) ملعب على شكل مستطيل ينتهي ضلعاه المتقابلان منه بنصف دائرة خارج المستطيل طول قطرها مساوياً لطول هذا الضلع. إذا كان محيط الملعب ٤٠٠ م فأثبت أن مساحة سطح الملعب تكون أكبر ما يمكن عندما يكون الملعب على شكل دائرة وأوجد طول نصف قطرها.

الحل



المحيط = ٤٠٠

$٢ص + ٢\pi س = ٤٠٠$ [÷ ٢]

$ص + \pi س = ٢٠٠$

$ص = ٢٠٠ - \pi س$

مساحة الملعب =

$م = ٢س ص + \pi س^٢$

$= ٢س(٢٠٠ - \pi س) + \pi س^٢$

$= ٤٠٠ س - ٢\pi س^٢ + \pi س^٢$

$= ٤٠٠ س - \pi س^٢$

$م' = ٤٠٠ - ٢\pi س$

بوضع $م' = ٠$

$∴ ٢\pi س = ٤٠٠$

$س = \frac{٤٠٠}{٢\pi} = \frac{٢٠٠}{\pi}$

$م'' = -٢\pi$ أكبر ما يمكن

$∴ س = \frac{٢٠٠}{\pi}$ ، $ص = ٢٠٠ - \pi \times \frac{٢٠٠}{\pi} =$ صفر

أي أن البعد يتلاشى ويصبح على شكل دائرة طول نصف قطرها $\frac{٢٠٠}{\pi}$

الوحدة الرابعة



التفاضل

* إذا كانت $ص = س^{3}$

$دص = 3 س^{2} دس$

* إذا كانت $ع = ل^{4}$

$دع = 4 ل^{3} دل$

* إذا كانت $ص = ع . ل$

$دص = ع دل + ل دع$

* إذا كانت $ص = \frac{ع}{ل}$

$دص = \frac{ل دع - ع دل}{ل^{2}}$

تذكر أن

* $\frac{د}{دس} \int د(س) دس = د(س)$

* $\int \frac{د}{دس} [د(س)] دس = د(س) + ث$



فاكر القاعدتين

(1) $\int [د(س)]^{ن} د'(س) دس = \frac{[د(س)]^{ن+1}}{ن+1} + ث$

(2) $\int \frac{د'(س)}{د(س)} دس = لو_{هـ} |د(س)| + ث$

إذا وجدت الدالة ومشتقتها ضرب بعض

هنستخدم القاعدتين اللي فوق

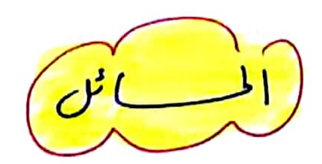
طيب إذا لم تجدهم بصورة

هنستخدم التعويض

المشكلة مع اللي داخل الأقواس أو تحت الجذر

$\sqrt{\ }$ ← ماتحت الجذر $= ع^{2}$

$\sqrt[3]{\ }$ ← ماتحت الجذر $ع^{3}$ وهكذا



(1) $\int س^{3} (2س^{4} + 3)^{5} دس$

الحل

النوع ده سهل بدون تعويض انت محتاج $8س^{3}$ بره

$\frac{1}{8} \int 8س^{3} (2س^{4} + 3)^{5} دس$

$\frac{1}{8} \times \frac{1}{6} (2س^{4} + 3)^{6} + ث$

$= \frac{1}{48} (2س^{4} + 3)^{6} + ث$

حاول تحل بالتعويض

٢) $\int \frac{٥س}{٣س^٢ - ١} \, دس$

الحل

$ع = ٣س^٢ - ١$

$دع = ٦س \, دس$

$\frac{٥}{٦} \int \frac{دع}{ع}$

$= \frac{٥}{٦} لو_{هـ} |ع| + ث$

$= \frac{٥}{٦} لو_{هـ} |٣س^٢ - ١| + ث$

٣) $\int س \sqrt{س^٢ + ١} \, دس$

الحل

$ع = \sqrt{س^٢ + ١}$

$ع^٢ = س^٢ + ١$

$٢ع \, دع = ٢س \, دس$

$\int ع \, (ع \cdot دع)$

$\int ع^٢ \, دع$

$= \frac{١}{٣} ع^٣ + ث = \frac{١}{٣} (س^٢ + ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

٤) $\int (س^٢ - ١) \sqrt{س + ١} \, دس$

الحل

$ع = \sqrt{س + ١}$

$ع^٢ = س + ١$ $\boxed{دس = ٢ع \, دع}$

$س = ع^٢ - ١$

$س^٢ = (ع^٢ - ١)^٢$

$(س^٢ - ١) = (ع^٢ - ١)^٢ - ١$

$\int [(ع^٢ - ١)^٢ - ١] \times ع \times ٢ع \, دع$

$\int [ع^٤ - ٢ع^٢ + ١ - ١] \, ٢ع^٢ \, دع$

$\int (٢ع^٦ - ٤ع^٤) \, دع$

$\frac{٢}{٧} ع^٧ - \frac{٤}{٥} ع^٥ + ث$

$= \frac{٢}{٧} (س + ١)^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٤}{٥} (س + ١)^{\frac{٥}{٢}} + ث$

٥) $\int \sqrt{\frac{١ + \sqrt{س}}{س}} \, دس$

الحل

بوضع $ع = ١ + \sqrt{س}$

$\sqrt{س} = ع - ١$

$س = (ع - ١)^٢$

$دس = ٢(ع - ١) \, دع$

$\int \sqrt{\frac{ع}{(ع - ١)^٢}} \times ٢(ع - ١) \, دع$

$= \int ٢ \sqrt{ع}\ دع$

$\int ٢\ ع^{\frac{1}{2}}\ دع$

$٢ \times \frac{٢}{٣}\ ع^{\frac{3}{2}}\ دع$

$\frac{٤}{٣} (١ + \sqrt{س})^{\frac{3}{2}} + ث$

---

(٦) $\int \frac{س}{س+١}\ دس$

الحل

$س + ١ = ع$

$س = ع - ١$

$دس = دع$

$\int \frac{ع - ١}{ع}\ دع$

$\int \left(\frac{ع}{ع} - \frac{١}{ع}\right) دع$

$\int \left(١ - \frac{١}{ع}\right) دع$

$ع - لو_{هـ} |ع| + ث$

$= (س + ١) - لو_{هـ} |س + ١| + ث$

التكامل بالتجزيء

ودة نستخدمه عندما نجد دالتين مضروبين في بعض واحدة هنكاملها والثانية هنفاضلها

---

* أسية ← نكاملها، مع كثيرة حدود ← نفاضلها

* لوغاريتمية ← هنفاضلها، مع كثيرة حدود ← هنكاملها

* جبرية ← هنفاضلها، مع دالة مثلثية ← هنكاملها

$\int ع\ دص = ع ص - \int ص\ دع$

ع (هنفاضل) ← دع ، دص (هنكامل) ← ص

$= ع ص - \int ص\ دع$

أوجد كلاً مما يلي:

(٧) $\int س\, هـ^{س}\, ءس$

الحل

$س$	$هـ^{س}$
1	$هـ^{س}$

$= س\, هـ^{س} - \int هـ^{س}\, ءس$

$= س\, هـ^{س} - هـ^{س} + ث$

$= هـ^{س}(س - 1) + ث$

---

(٨) $\int \frac{س}{هـ^{2س}}\, ءس$

الحل

$= \int س\, هـ^{-2س}\, ءس$

$س$	$هـ^{-2س}$
1	$-\frac{1}{2} هـ^{-2س}$

$= -\frac{1}{2} س\, هـ^{-2س} - \int -\frac{1}{2} هـ^{-2س}\, ءس$

$= -\frac{1}{2} س\, هـ^{-2س} - \frac{1}{4} هـ^{-2س} + ث$

---

(٩) $\int لو_{هـ} س\, ءس$

الحل

$= \int 1 \cdot لو_{هـ} س\, ءس$

$لو_{هـ} س$	$ءس$
$\frac{1}{س}$	$س$

$= س\, لو_{هـ} س - \int س \times \frac{1}{س}\, ءس$

$= س\, لو_{هـ} س - \int ءس$

$= س\, لو_{هـ} س - س + ث$

---

(١٠) $\int \frac{هـ^{2س}}{هـ^{2س} + 3}\, ءس$

الحل

نلاحظ مشتقة $هـ^{2س} + 3$ هي $2هـ^{2س}$

$\frac{1}{2} \int \frac{2هـ^{2س}}{هـ^{2س} + 3}\, ءس$

$\frac{1}{2} لو_{هـ} |هـ^{2س} + 3| + ث$

---

(١١) $\int س^{2}\, هـ^{س}\, ءس$

الحل

$س^{2}$	$+$	$هـ^{س}$
$2س$	$-$	$هـ^{س}$
2	$+$	$هـ^{س}$
0		$هـ^{س}$

$= س^{2} هـ^{س} - 2س\, هـ^{س} + 2هـ^{س} + ث$

---

* يستخدم عمود التكامل عندما يكون الأس أكبر من ١ والإشارات تتناوب + ثم − ثم + وهكذا

⑫ أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة م(٢، ٣) وميل العمودى عليه عند أى نقطة هو ٣ − س

الحل

∵ ميل العمودى = ٣ − س

∴ ميل المماس = $\frac{-1}{\text{٣} - \text{س}} = \frac{1}{\text{س} - \text{٣}}$

$\text{ص} = \int \frac{1}{\text{س} - \text{٣}} \, \text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - \text{٣}| + \text{ث}$

بالتعويض بـ (٢، ٣)

$\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٢} - \text{٣}| + \text{ث} = \text{٣}$

$\text{٠} + \text{ث} = \text{٣}$ ∴ ث = ٣

∴ معادلة المنحنى

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - \text{٣}| + \text{٣}$



① $\int \frac{1}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \, \text{ءس}$

الحل

بسط تفاضل المقام

$\int \frac{\frac{1}{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \, \text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{ث}$

② $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}} \, \text{ءس}$

الحل

$\int \frac{1}{\text{س}} \, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \, \text{ءس}$ دالة × مشتقتها

$\frac{1}{2} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 + \text{ث}$

③ $\int \text{س} \, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \, \text{ءس}$

الحل

تجزيء

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$	س
$\frac{1}{\text{س}}$	$\frac{1}{2}\text{س}^2$

$= \frac{1}{2}\text{س}^2 \, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{1}{2} \times \text{س}^2 \times \frac{1}{\text{س}} \, \text{ءس}$

$\frac{1}{2}\text{س}^2 \, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{2}\int \text{س} \, \text{ءس}$

$\frac{1}{2}\text{س}^2 \, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{4}\text{س}^2 + \text{ث}$

الدرس الثانى
تكامل الدوال المثلثية

① ∫ جاس ءس = − جتاس + ث

② ∫ جتاس ءس = جاس + ث

③ ∫ قا²س ءس = ظاس + ث

④ ∫ قتا²س ءس = − ظتاس + ث

⑤ ∫ قاس ظاس ءس = قاس + ث

⑥ ∫ قتاس ظتاس ءس = − قتاس + ث



جا²س + جتا²س = ١

١ − جا²س = جتا²س

١ − جتا²س = جا²س

---

١ + ظا²س = قا²س

قا²س − ظا²س = ١

قا²س − ١ = ظا²س

---

١ + ظتا²س = قتا²س

جتا٢س

جتا²س − جا²س

٢جتا²س − ١

١ − ٢جا²س

جتا²س = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ جتا٢س

جا²س = $\frac{1}{2}$ − $\frac{1}{2}$ جتا٢س



① ∫ (جاس + جتاس) ءس

الحل

− جتاس + جاس + ث

---

② ∫ قا²(٥ − ٣س) ءس

الحل

$-\frac{1}{3}$ ظا(٥ − ٣س) + ث

---

③ ∫ قا٢س ظا٢س ءس

الحل

$\frac{1}{2}$ قا٢س + ث

٤ $\int (1+\text{ظا}^2\text{س})\,\text{جتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

الحل

$\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

$\int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} \times \text{جتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

$\int 1\ \text{ءس} = \text{س} + \text{ث}$

---

٥ $\int \frac{1}{1-\text{جتا}^2\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل

$\int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}}\ \text{ءس}$

$\int \text{قتا}^2\text{س}\ \text{ءس} = -\text{ظتاس} + \text{ث}$

---

٦ $\int \frac{\text{جا}^2(٢\text{س}-٣)}{1-\text{جتا}(٢\text{س}-٣)}\ \text{ءس}$

الحل

$= \int \frac{1-\text{جتا}^2(٢\text{س}-٣)}{1-\text{جتا}(٢\text{س}-٣)}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{[1-\text{جتا}(٢\text{س}-٣)][1+\text{جتا}(٢\text{س}-٣)]}{[1-\text{جتا}(٢\text{س}-٣)]}\ \text{ءس}$

$\text{س} + \frac{1}{2}\text{جا}(٢\text{س}-٣) + \text{ث}$

---

٧ $\int \text{جا}^5\text{س}\ \text{جتاس}\ \text{ءس}$

الحل

$\text{د(س)} = \text{جاس}$

$\text{د}'\text{(س)} = \text{جتاس}$

$\frac{1}{6}\text{جا}^6\text{س} + \text{ث}$

---

٨ $\int \text{قا}^5\text{س}\ \text{ظاس}\ \text{ءس}$

الحل

$\text{د(س)} = \text{قاس}$

$\text{د}'\text{(س)} = \text{قاس ظاس}$

$\int \text{قا}^4\text{س}\ (\text{قاس ظاس})\ \text{ءس}$

$\frac{1}{5}\text{قا}^5\text{س} + \text{ث}$

---

٩ $\int \text{ظتا}^3\text{س}\ \text{ءس}$

الحل

$\int \text{ظتا}^2\text{س}\ \text{ظتاس}\ \text{ءس}$

$\int (\text{قتا}^2\text{س}-1)\ \text{ظتاس}\ \text{ءس}$

$= \int \text{قتا}^2\text{س}\ \text{ظتاس} - \text{ظتاس}\ \text{ءس}$

$\int \left[\text{قتاس}(\text{قتاس ظتاس}) - \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\right] \text{ءس}$

$-\frac{1}{2}\text{قتا}^2\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| + \text{ث}$

أو $= -\frac{1}{2}\text{قتا}^2\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قتاس}| + \text{ث}$

ملحوظات هامة

$\int ه^{س} [د(س) + د'(س)] ء س$

$= ه^{س} د(س) + ث$

أمثلة

* $\int ه^{س} [جتا س + جا س] ء س$

$= ه^{س} جا س + ث$

* $\int ه^{س} (ظتا س - قتا^{٢} س) ء س$

$= ه^{س} ظتا س + ث$

* مع العلم انه فى الخطوات نستخدم التجزىء العادى

---

(١٠) $\int س جتا س ء س$

س	جتا س
١	جا س

$س جا س - \int جا س ء س$

$س جا س + جتا س + ث$

---

(١١) أوجد معادلة المنحنى الذى يمر (١، -٢) وميل المماس له عند أى نقطة عليه هو $\frac{ءص}{ءس} = ٣\pi جتا \pi س - ٢\pi جا \pi س$

الحل

$\because \frac{ءص}{ءس} = ٣\pi جتا \pi س - ٢\pi جا \pi س$

بالتكامل

$ص = \int (٣\pi جتا \pi س - ٢\pi جا \pi س) ء س$

$= \frac{٣\pi}{\pi} جا \pi س + \frac{٢\pi}{\pi} جتا \pi س + ث$

$ص = ٣ جا \pi س + ٢ جتا \pi س + ث$

بالتعويض بـ (١، -٢)

$٣ جا ١٨٠ + ٢ جتا ١٨٠ + ث = -٢$

$٠ - ٢ + ث = -٢$

$ث = -٢ + ٢ \quad \therefore ث = ٠$

$\therefore$ المعادلة هى

$ص = ٣ جا \pi س + ٢ جتا \pi س$



اختر الحاجه اللى تعجبك

١ إذا كانت $\frac{دص}{دس}$ = قتا²س ، ص = ٢ عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن ص = ...

(أ) −٢ − ظتاس (ب) ٢ − ظتاس

(ج) −٣ − ظتاس (د) ٣ − ظتاس (الإجابة)

---

٢ ∫ (٤ − قتاس ظتاس) دس = ... + ث

(أ) ٤س − قتاس (ب) ٤س + قتاس (الإجابة)

(ج) ٤س − قتا²س (د) ٤س + قتا²س

---

٣ ∫ ظا²س دس = ... + ث

(أ) ظاس − س (الإجابة) (ب) ظاس + س

(ج) قا²س (د) $\frac{١}{٣}$ ظا³س

الفكرة: ظا²س = قا²س − ١

∫ (قا²س − ١) دس

ظاس − س + ث بس كده

---

٤ ∫ ظاθ دθ = ... + ث

(أ) − لوهـ |جتاθ| (الإجابة) (ب) − لوهـ جتاθ

(ج) لوهـ جتاθ (د) |لوهـ جتاθ|

---

٥ ∫ ٢ جتا²س دس = ... + ث

(أ) س + $\frac{١}{٢}$ جا٢س (الإجابة) (ب) س + ٢جا٢س

(ج) س − $\frac{١}{٢}$ جا٢س (د) س − جا٢س

تذكر أن جتا²س = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

∫ ٢جتا²س = ∫ (١ + جتا٢س) دس

---

٦ ∫ قا⁴س ظاس دس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٥}$ قا⁵س (ب) $\frac{١}{٤}$ قا⁴س (الإجابة)

(ج) $\frac{١}{٣}$ ظا³س (د) − $\frac{١}{٣}$ ظا³س

∫ قا³س (قاس ظاس) دس

$\frac{١}{٤}$ قا⁴س + ث

---

٧ ∫ (٣س + ٢) جاس دس = ... + ث

جاس   ٣س + ٢

−جتاس ← ٣

= −(٣س + ٢) جتاس + ٣ ∫ جتاس دس

−(٣س + ٢) جتاس + ٣ جاس + ث

كده ودّه الاختيار المناسب

بس أنا كسلت أكتب الاختيارات

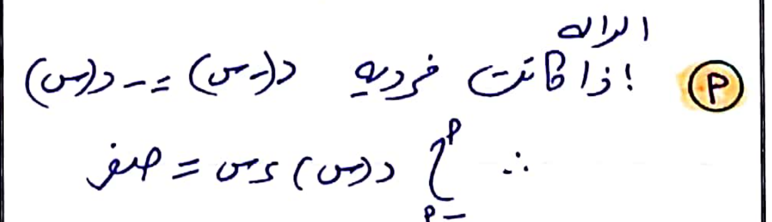
الدرس الثالث
التكامل المحدد

١) $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\,\text{ءس} = -\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\,\text{ءس}$

٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\,\text{ءس} = \text{صفر}$

٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\,\text{ءس} =$

٤) $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\,\text{ءس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\,\text{ءس}$



* في حالة التكامل $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}}$ نبحث نوع الدالة

أ) إذا كانت الدالة فردية $\text{د(-س)} = -\text{د(س)}$

$\therefore \int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\,\text{ءس} = \text{صفر}$

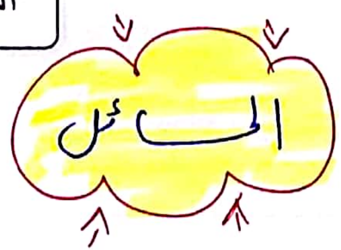
ب) وإذا كانت زوجية $\text{د(-س)} = \text{د(س)}$

$\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\,\text{ءس} = 2\int_{0}^{\text{أ}} \text{د(س)}\,\text{ءس}$

٥) لاحظ $\text{جتا}(-\theta) = \text{جتا}\,\theta$ زوجية

$\text{جا}(-\theta) = -\text{جا}\,\theta$

$\text{ظا}(-\theta) = -\text{ظا}\,\theta$ فردية



المسائل

١) $\int_{-1}^{2} (2\text{س}+3)\,\text{ءس}$

الحل

$\left[\frac{2\text{س}^2}{2} + 3\text{س}\right]_{-1}^{2}$

$= \left[\text{س}^2 + 3\text{س}\right]_{-1}^{2}$

$= [4 + 6] - [1 - 3]$

$10 + 2 = 12$

٢) $\int_{0}^{1} 2\,\text{جا}\,\pi\,\text{ع}\,\text{ءع}$

الحل

$\left[-\frac{2}{\pi}\,\text{جتا}\,\pi\,\text{ع}\right]_{0}^{1}$

$= \left[-\frac{2}{\pi}\,\text{جتا}\,180^\circ\right] - \left[-\frac{2}{\pi}\,\text{جتا}\,0^\circ\right]$

$\left(-\frac{2}{\pi} \times -1\right) - \left(-\frac{2}{\pi} \times 1\right)$

$\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}$

٣) $\int_{-3}^{3} \frac{\text{س}}{1+\text{س}^2}\,\text{ءس}$

الحل

نبحث نوع الدالة $\text{د(-س)} = \frac{-\text{س}}{1+(-\text{س})^2} = -\left(\frac{\text{س}}{1+\text{س}^2}\right)$ فردية

$\therefore \int_{-3}^{3} \frac{\text{س}}{1+\text{س}^2}\,\text{ءس} = \text{صفر}$

④ $\int_{-2}^{2} \left(س^3 \sqrt{س^4 + 3}\right) ds$

الحل

نبحث نوع الدالة

$د(س) = (-س)^3 \sqrt{(-س)^4 + 3}$ ... $د(-س) = (-س)^3 \sqrt{(-س)^4 + 3}$

$= -\left(س^3 \sqrt{س^4 + 3}\right) = -د(س)$ فردية

$\therefore \int_{-2}^{2} \left(س^3 \sqrt{س^4 + 3}\right) ds = صفر$

---

⑤ $\int_{-3}^{3} (س^2 - 1)\, ds$

الحل

$د(-س) = (-س)^2 - 1 = س^2 - 1$

$= د(س)$ زوجية

$= 2 \int_{0}^{3} (س^2 - 1)\, ds$

$2 \left[\frac{1}{3} س^3 - س\right]_{0}^{3}$

$= 2 \left[\left(\frac{1}{3} \times 27 - 3\right) - (0)\right]$

$2 \left[(9 - 3)\right] = 12$

---

⑥ إذا كانت د متصلة [٢، ٧]

فأوجد $\int_{2}^{7} د(س)\, ds + \int_{7}^{4} د(س)\, ds$

= - - -

الحل

$\int_{2}^{7} د(س)\, ds - \int_{4}^{7} د(س)\, ds$

$\therefore \int_{2}^{4} د(س)\, ds$

---

⑦ إذا كانت د متصلة [١، ٤]

فأوجد $\int_{1}^{4} د(س)\, ds + \int_{4}^{1} د(س)\, ds = ...$

الحل

$= \int_{1}^{4} د(س)\, ds - \int_{1}^{4} د(س)\, ds = صفر$

---

⑧ إذا كانت د دالة زوجية متصلة

على [-٤، ٤] ، $\int_{-4}^{4} د(س)\, ds = 20$

، $\int_{0}^{2} د(س)\, ds = 6$

ما قيمة $\int_{-4}^{2} د(س)\, ds$ ؟

الحل

$\because \int_{-4}^{4} د(س)\, ds = 2 \int_{-4}^{0} د(س)\, ds = 20$

$\therefore \int_{-4}^{0} د(س)\, ds = 10$

$\therefore \int_{-4}^{2} د(س)\, ءس$

$= \int_{-4}^{1} د(س)\, ءس + \int_{1}^{2} د(س)\, ءس$

$= 10 + 6 = 16$

---

9 إذا كانت

$د(س) = \begin{cases} 2س + س^2 & ، س < 0 \\ 2س - س^2 & ، س \geq 0 \end{cases}$

أوجد $\int_{-1}^{3} د(س)\, ءس$

الحل

$\int_{-1}^{3} د(س)\, ءس$

$= \int_{-1}^{0} د(س)\, ءس + \int_{0}^{3} د(س)\, ءس$

$= \int_{-1}^{0} (2س + س^2)\, ءس + \int_{0}^{3} (2س - س^2)\, ءس$

$= \left[س^2 + \frac{1}{3}س^3\right]_{-1}^{0} + \left[س^2 - \frac{1}{3}س^3\right]_{0}^{3}$

$= \left[0 - (1 - \frac{1}{3})\right] + \left[(9 - 9) - 0\right]$

$= -\frac{2}{3}$

---

10 $\int_{-4}^{2} |س + 1|\, ءس$

الحل

$د(س) = |س + 1|$

$= \begin{cases} س + 1 & س \geq -1 \\ -س - 1 & س < -1 \end{cases}$

$\therefore \int_{-4}^{2} د(س)\, ءس$

$= \int_{-4}^{-1} د(س)\, ءس + \int_{-1}^{2} د(س)\, ءس$

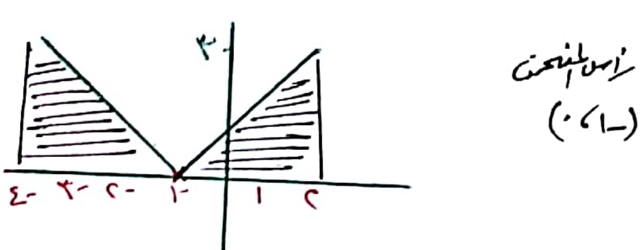
$= \left[-\frac{1}{2}س^2 - س\right]_{-4}^{-1} + \left[\frac{1}{2}س^2 + س\right]_{-1}^{2}$



حل آخر

تمثيل حل كمادرات المقياس بهذه الطريقة

رأس المنحنى $(-1 ، 0)$



المساحة $= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3$

$= 4.5 + 4.5 = 9$

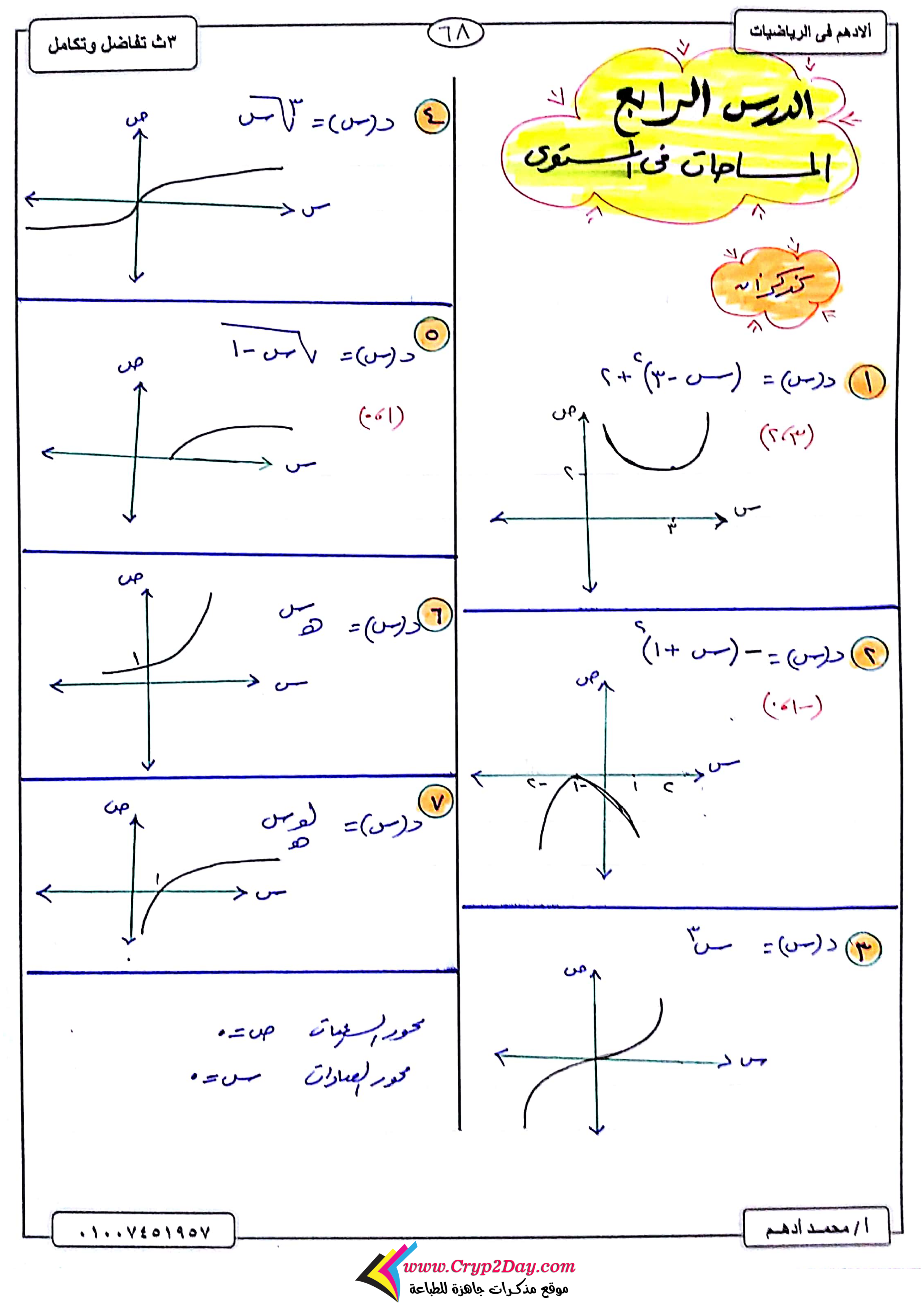
---

11 إذا كانت $\int_{-2}^{3} د(س)\, ءس = 12$ ، $\int_{-2}^{5} د(س)\, ءس = 16$

ث ع 2018

فإن $\int_{3}^{5} د(س)\, ءس = \ldots\ldots$

$= \int_{-2}^{5} - \int_{-2}^{3} = 16 - 12 = 4$



الدرس الرابع
المساحات فى المستوى

تذكرة

١) $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} - ٣)^{٢} + ٢$

(٣، ٢)

٢) $\text{د}(\text{س}) = -(\text{س} + ١)^{٢}$

(-١، ٠)

٣) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$

٤) $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}}$

٥) $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ١}$

(١، ٠)

٦) $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

٧) $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

محور السينات ص = ٠

محور الصادات س = ٠

أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين



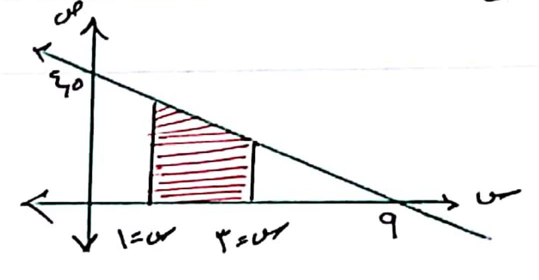
(٨) $\text{س} + ٢\text{ص} = ٩$ ، $\text{س} = ١$ ، $\text{س} = ٣$ ، $\text{ص} = ٠$

الحل

نرسم المستقيم $\text{س} + ٢\text{ص} = ٩$

بوضع $\text{س} = ٠$ $\therefore \text{ص} = ٤٫٥$

بوضع $\text{ص} = ٠$ $\therefore \text{س} = ٩$



، ص = ٠ محور السينات

$\because \text{س} + ٢\text{ص} = ٩$

$٢\text{ص} = ٩ - \text{س}$

$\text{ص} = \frac{١}{٢}(٩ - \text{س})$

$\int_{١}^{٣} \frac{١}{٢}(٩ - \text{س})\, ء\text{س}$

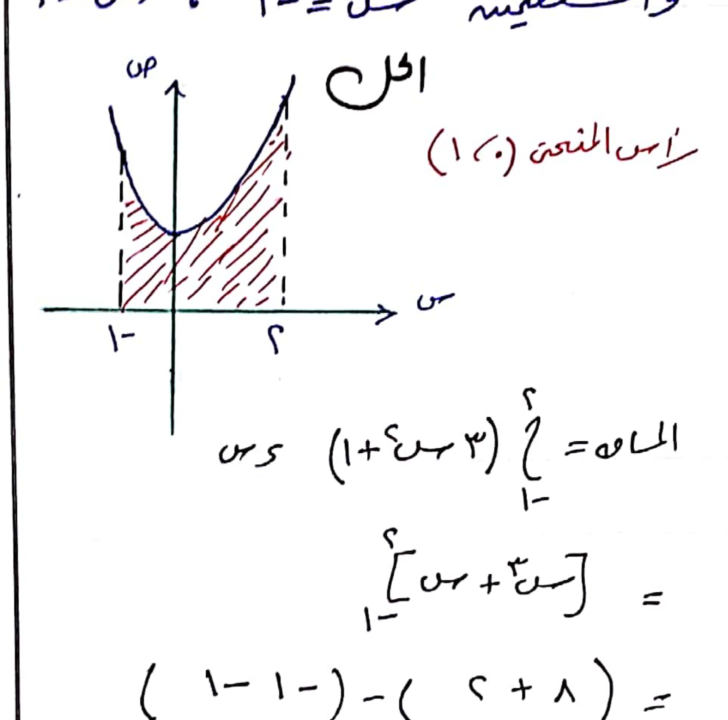
$\frac{١}{٢}\left[٩\text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}^٢\right]_{١}^{٣}$

$\frac{١}{٢}\left[(٢٧ - ٤٫٥) - (٩ - \frac{١}{٢})\right]$

$\frac{١}{٢}[١٤] = ٧$ وحدة مربعة

(٩) منحنى الدالة $د(\text{س}) = ٣\text{س}^٢ + ١$ ومحور السينات والمستقيمين $\text{س} = -١$ ، $\text{س} = ٢$

الحل



رأس المنحنى (٠، ١)

المساحة $= \int_{-١}^{٢} (٣\text{س}^٢ + ١)\, ء\text{س}$

$= \left[\text{س}^٣ + \text{س}\right]_{-١}^{٢}$

$= (٨ + ٢) - (-١ - ١)$

$١٠ + ٢ = ١٢$ وحدة مربعة

(١٠) المنحنى $\text{ص} = \sqrt{\text{س} + ٤}$ ، $\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ٥$ ، $\text{ص} = ٠$

الحل

رأس المنحنى (−٤، ٠)

ص = ٠ محور السينات

، س = ٠ ، س = ٥

المساحة $= \int_{٠}^{٥} \sqrt{\text{س} + ٤}\, ء\text{س}$

$\left[\frac{٢}{٣}(\text{س} + ٤)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٥}$

$= \frac{٣٨}{٣}$ وحدة مربعة

(١١) منحنيي الدالتين $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{2} - 2$ ، $\text{ر}(\text{س}) = 3 - (\text{س} + 1)^{2}$

الحل

بحل المعادلتين لإيجاد نقط التقاطع

$\text{س}^{2} - 2 = 3 - (\text{س}^{2} + 2\text{س} + 1)$

$\text{س}^{2} - 2 = 3 - \text{س}^{2} - 2\text{س} - 1$

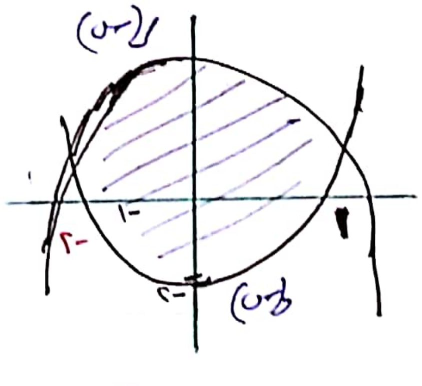
$2\text{س}^{2} + 2\text{س} - 2 - 3 + 1 = 0$

$2\text{س}^{2} + 2\text{س} - 4 = 0 \quad \div 2$

$\text{س}^{2} + \text{س} - 2 = 0$

$(\text{س} + 2)(\text{س} - 1) = 0$

$\text{س} = -2$ ، $\text{س} = 1$



$$\text{م} = \int_{-2}^{1} [\text{ر}(\text{س}) - \text{د}(\text{س})] \, \text{ءس}$$

$$= \int_{-2}^{1} [(3 - (\text{س}+1)^{2}) - (\text{س}^{2} - 2)] \, \text{ءس}$$

$$= \int_{-2}^{1} [3 - \text{س}^{2} - 2\text{س} - 1 - \text{س}^{2} + 2] \, \text{ءس}$$

$$= \int_{-2}^{1} [-2\text{س}^{2} - 2\text{س} + 4] \, \text{ءس}$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\text{س}^{3} - \text{س}^{2} + 4\text{س}\right]_{-2}^{1} = 9$$ وحدة مربعة

(١٢) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين د ، ر حيث

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{3} - 3\text{س}^{2} + 5$

، $\text{ر}(\text{س}) = \text{س} + 2$

الحل

بحل المعادلتين لإيجاد نقط التقاطع

$\text{س}^{3} - 3\text{س}^{2} + 5 = \text{س} + 2$

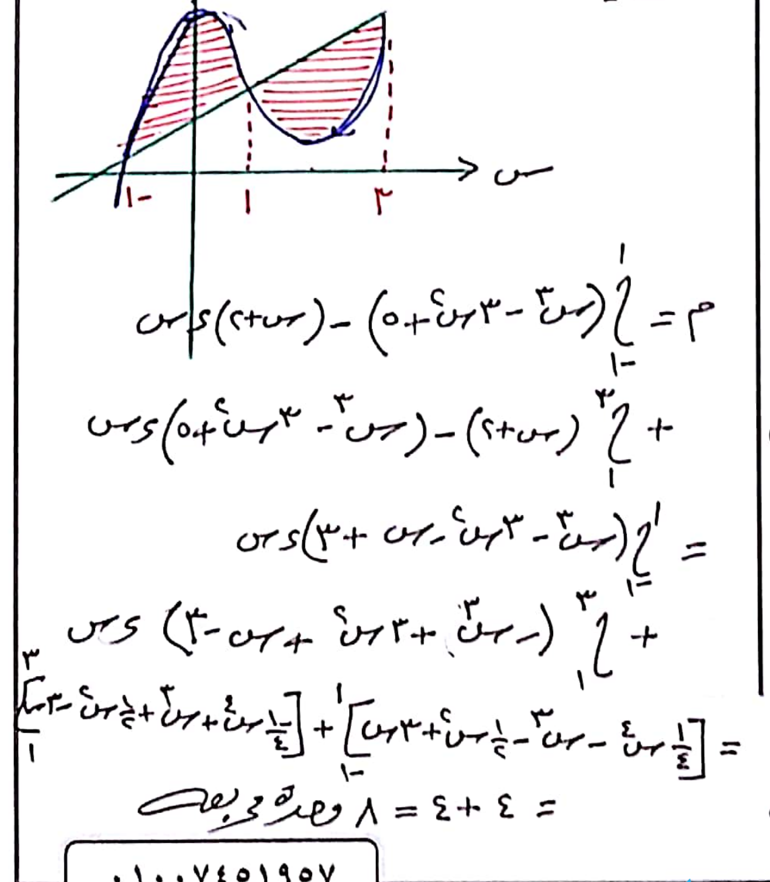
$\text{س}^{3} - 4\text{س}^{2} + 3 = 0$

$\text{س} = -1$ ، 1 ، 3 بالآلة

هنا خد نقطة بين -1 ، 1 (٠) وتعوض في المعادلتين

هتجد أن $\text{د}(\text{س}) > \text{ر}(\text{س})$

وبين 1 ، 3 العكس (٢).



$$\text{م} = \int_{-1}^{1} (\text{س}^{3} - 3\text{س}^{2} + 5) - (\text{س} + 2) \, \text{ءس}$$

$$+ \int_{1}^{3} (\text{س} + 2) - (\text{س}^{3} - 3\text{س}^{2} + 5) \, \text{ءس}$$

$$= \int_{-1}^{1} (\text{س}^{3} - 3\text{س}^{2} - \text{س} + 3) \, \text{ءس}$$

$$+ \int_{1}^{3} (-\text{س}^{3} + 3\text{س}^{2} + \text{س} - 3) \, \text{ءس}$$

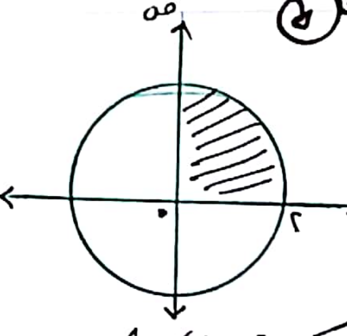
$$= \left[\frac{1}{4}\text{س}^{4} - \text{س}^{3} - \frac{1}{2}\text{س}^{2} + 3\text{س}\right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{1}{4}\text{س}^{4} + \text{س}^{3} + \frac{1}{2}\text{س}^{2} - 3\text{س}\right]_{1}^{3}$$

$= 4 + 4 = 8$ وحدة مربعة

(١٣) باستخدام المساحة تحت المنحنى أوجد قيمة

$\int_{0}^{2} \sqrt{4 - س^2}\ ءس$

الحل



ص = $\sqrt{4 - س^2}$

ص² = ٤ − س²

ص² + س² = ٤

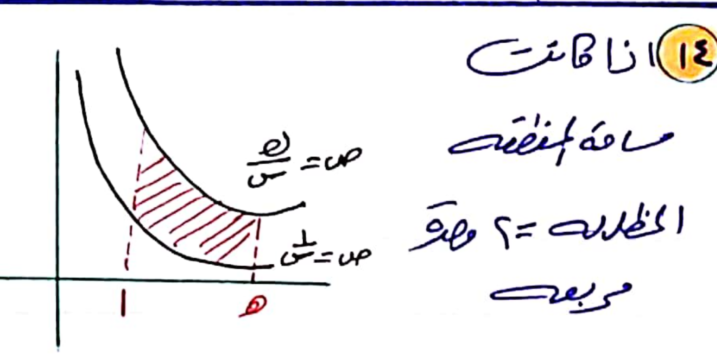
وهى معادلة دائرة مركزها (٠ ، ٠)

وطول نصف قطرها = ٢ وحدة طول

المساحة = $\frac{1}{4}$ ط نق² = $\frac{1}{4}$ × ط × ٤

= ط وحدة مربعة

(١٤) إذا كانت مساحة المنطقة المظللة = ٢ وحدة مربعة



فإن ل = ...

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

$\int_{1}^{هـ} \left(\frac{ل}{س} - \frac{1}{س}\right) ءس$

$\left[ل لوهـ |س| - لوهـ |س|\right]_{1}^{هـ}$

= $\left[ل (لوهـ هـ - لوهـ ١) - (لوهـ هـ - لوهـ ١)\right]$ = ٢

ل − ١ = ٢

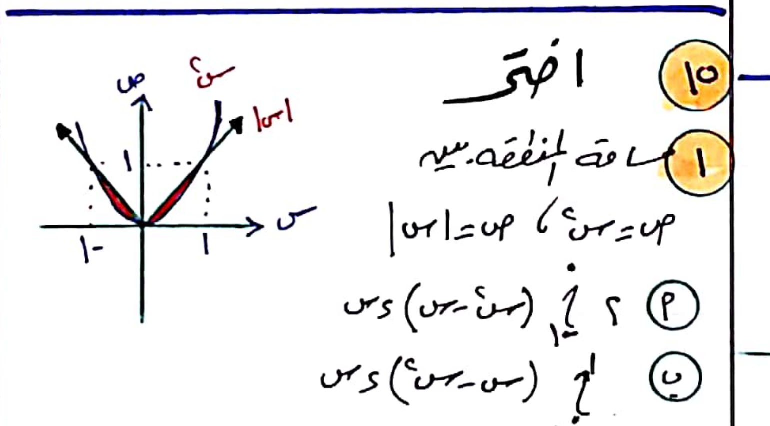
∴ ل = ٣ أى خدعة

ملحوظة

إذا لم يستطيع تعيين المنحنى الأعلى والأسفل [فى مسائل متحببين] استخدم أى حاجة بس خد قيمة مطلقة وهتطلع صح

(١٥) اختر

(١) مساحة المنطقة بين ص = س² ، ص = |س|



(أ) ٢ $\int_{0}^{1} (س^2 - س)\ ءس$

(ب) $\int_{0}^{1} (س - س^2)\ ءس$

(جـ) ٢ $\int_{0}^{1} (س - س^2)\ ءس$

(د) $\int_{-1}^{1} (س - س^2)\ ءس$

(٢) المساحة بين المنحنيين = ...

(أ) $\int_{-1}^{1} (س^3 - س)\ ءس$

(ب) ٢ $\int_{0}^{1} (س^3 - س)\ ءس$

(جـ) $\int_{0}^{1} (س - س^3)\ ءس$

(د) ٢ $\int_{0}^{1} (س - س^3)\ ءس$

٣ مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات

ص = س ، س = ٢ ، ص = ٠

= ... وحدة مربعة

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ١

(ج) ٢ (د) ٤

$\int_{0}^{2}$ س ءس = $\frac{1}{2}$ س^2] = $\frac{1}{2}$ × ٤ = ٢

٤ مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمات

ص = ٢س − ٣ ، ص = س + ١

، س = ٢ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) $\frac{9}{2}$ (د) ٦

بدون رسم نقطة التقاطع

٢س − ٣ = س + ١

س = ١ + ٣ س = ٤

= | $\int_{2}^{4}$ (ص١ − ص٢) ءس |

= | $\int_{2}^{4}$ ٢س − ٣ − س − ١ ءس |

= | $\int_{2}^{4}$ (س − ٤) ءس |

= [$\frac{1}{2}$ س^2 − ٤س]$_{2}^{4}$ = (٨ − ١٦) − (٢ − ٨)

−٨ + ٦

= | −٢ | = ٢

٥ مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى

ص = $\sqrt{4 - س^2}$ ومحور السينات مقدرة

بالوحدات المربعة = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٢π (د) ٤π

دى مساحة نصف دائرة طول نصف قطرها = ٢

$\frac{1}{2}$ [π نق^2] = $\frac{1}{2}$ × π × ٤ = ٢π

٦ فى الشكل ده

م١ = ٥ وحدة مربعة

م٢ = ٢ وحدة مربعة

م٣ = ٨ وحدة مربعة

فإنه

$\int_{-2}^{5}$ د(س) ءس + $\int_{-2}^{5}$ | د(س) | ءس = ...

(أ) ١٥ (ب) ٢٠ (ج) ٢٢ (د) ٢٦

= ٥ − ٢ + ٨ + ٥ + ٢ + ٨ = ٢٦ بس كده

آخر درس يا جدعان
حجوم الأجسام الدورانية

① إذا كان الدوران حول محور السينات

$$\text{ح} = \pi \int_{\text{س}_1}^{\text{س}_2} \text{ص}^2 \, \text{ء س}$$

② إذا كان الدوران حول محور الصادات

$$\text{ح} = \pi \int_{\text{ص}_1}^{\text{ص}_2} \text{س}^2 \, \text{ء ص}$$



① أوجد حجم الجسم الناتج من دوران $\text{ص} = ٣ - \text{س}$ ، $\text{س} = ٠$ ، $\text{ص} = ٠$ حول محور السينات دورة كاملة

الحل

$$= \pi \int_{0}^{3} \text{ص}^2 \, \text{ء س}$$

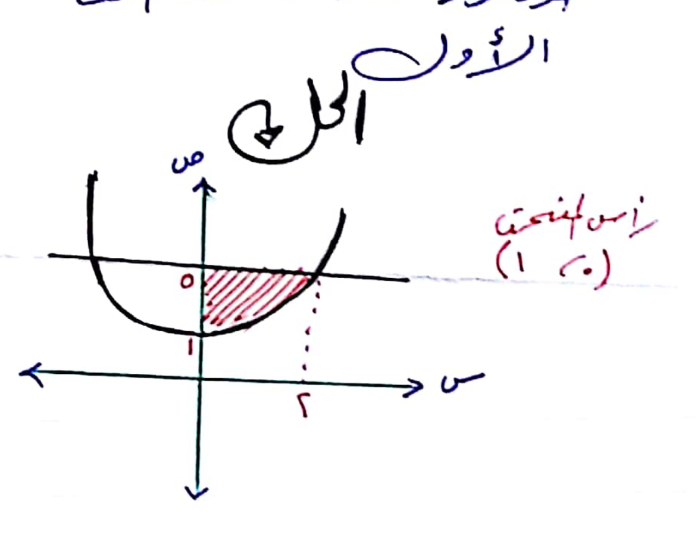
$$= \pi \int_{0}^{3} (\text{س} - ٣)^2 \, \text{ء س}$$

$$\pi \left[\tfrac{1}{3} (\text{س} - ٣)^3 \right]_{0}^{3}$$

$$\pi \left[٠ - \left(\tfrac{1}{3} \times ٢٧ \right) \right] = ٩\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

② أوجد حجم الناتج من دوران $\text{ص} = \text{س}^2 + ١$ ، $\text{س} = ٠$ ، $\text{ص} = ٥$ حول محور الصادات وفى الربع الأول

الحل



$$\text{ح} = \pi \int_{1}^{5} \text{س}^2 \, \text{ء ص}$$

$$\text{س}^2 = \text{ص} - ١$$

$$\text{ح} = \pi \int_{1}^{5} (\text{ص} - ١) \, \text{ء ص}$$

$$\pi \left[\tfrac{1}{2} \text{ص}^2 - \text{ص} \right]_{1}^{5}$$

$$= \pi \left[\left(\tfrac{25}{2} - ٥ \right) - \left(\tfrac{1}{2} - ١ \right) \right]$$

$$= ٨\pi \text{ وحدة حجم}$$

③ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $\text{ص} = \text{س}^2$ والمستقيم $\text{ص} = ٢\text{س}$ دورة كاملة حول محور السينات

الحل

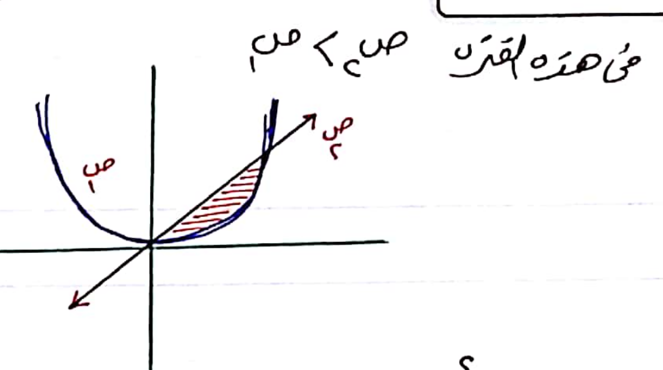
نقط التقاطع $\text{س}^2 = ٢\text{س}$

$\text{س}^2 - ٢\text{س} = ٠$

$\text{س}(\text{س} - ٢) = ٠$

$\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ٢$

في هذه الحالة $ص_2 > ص_1$



$ح = \pi \int_{0}^{2} (ص_2^2 - ص_1^2)\, ء س$

$= \pi \int_{0}^{2} \left[(2س)^2 - (س^2)^2\right] ء س$

$\pi \int_{0}^{2} (4س^2 - س^4)\, ء س$

$\pi \left[\frac{4}{3}س^3 - \frac{1}{5}س^5\right]_{0}^{2}$

$= \pi \left(\frac{4}{3} \times 8 - \frac{32}{5}\right)$

$\pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{64}{15}\pi$ وحدة حجم

$س = 1$ ، $س = 4$

، $ص_2 > ص_1$

$ح = \pi \int_{1}^{4} (ص_2^2 - ص_1^2)\, ء س$

$= \pi \int_{1}^{4} \left[(5-س)^2 - \left(\frac{4}{س}\right)^2\right] ء س$

$\pi \int_{1}^{4} (5-س)^2 - 16س^{-2}\, ء س$

$\pi \left[\frac{-1}{3}(5-س)^3 + 16س^{-1}\right]_{1}^{4}$

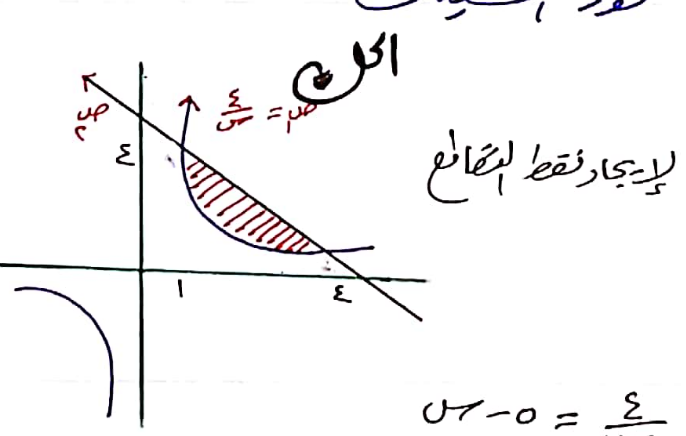
$\pi \left[\left(\frac{-1}{3} \times 1 + \frac{16}{4}\right) - \left(\frac{-64}{3} + \frac{16}{1}\right)\right]$

$\pi \left[\frac{-1}{3} + 4 + \frac{64}{3} - 16\right] = 9\pi$ وحدة حجم

---

(٤) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = \frac{4}{س}$ والمستقيم $س + ص = 5$ دورة كاملة حول محور السينات

الحل



لإيجاد نقط التقاطع

$\frac{4}{س} = 5 - س$

$4 = 5س - س^2$

$-س^2 + 5س - 4 = 0$

$س^2 - 5س + 4 = 0$

---

(٥) $\pi \int_{-2}^{2} (4 - س^2)\, ء س$ ، هو حجم ...

(أ) كرة طول نصف قطرها ٤ وحدات

(ب) مخروط دائري قائم ارتفاعه ٤ وحدات

(ج) كرة طول نصف قطرها ٢ وحدة

(د) اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٤ وحدات

$ص^2 = 4 - س^2$

$س^2 + ص^2 = 4$

دائرة عند دورانها يعطي كرة نق = ٢ وحدة

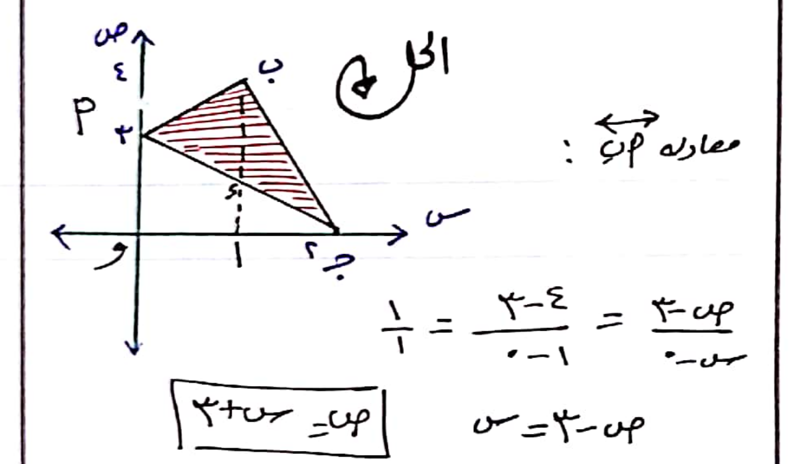
٦) إذا كانت أ(٠، ٣) ، ب(١، ٤) ، جـ(٢، ٠)

أوجد باستخدام التكامل:

أ) مساحة سطح Δ أ ب جـ

ب) حجم الجسم الناشئ من دوران Δ أ و جـ دورة كاملة حول محور الصادات.

الحل



معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$:

$$\frac{\text{ص}-٣}{\text{س}-٠} = \frac{٤-٣}{١-٠} = \frac{١}{١}$$

$\text{ص} - ٣ = \text{س}$

$$\boxed{\text{ص} = \text{س} + ٣}$$

معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$:

$$\frac{\text{ص}-٠}{\text{س}-٢} = \frac{٤-٠}{١-٢} = -٤$$

$$\boxed{\text{ص} = -٤\text{س} + ٨}$$

معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$:

$$\frac{\text{ص}-٣}{\text{س}-٠} = \frac{٠-٣}{٢-٠} = \frac{-٣}{٢}$$

$$\boxed{\text{ص} = \frac{-٣}{٢}\text{س} + ٣}$$

مساحة Δ أ ب جـ = م Δ أ ب د + م Δ د ب جـ

$$= \int_{٠}^{١} (\text{س}+٣) - (\frac{-٣}{٢}\text{س}+٣)\, د\text{س}$$

$$+ \int_{١}^{٢} (-٤\text{س}+٨) - (\frac{-٣}{٢}\text{س}+٣)\, د\text{س}$$

$$= \int_{٠}^{١} (\frac{٥}{٢}\text{س})\, د\text{س} + \int_{١}^{٢} (\frac{-٥}{٢}\text{س}+٥)\, د\text{س}$$

$$= \left[\frac{٥}{٤}\text{س}^٢\right]_{٠}^{١} + \left[\frac{-٥}{٤}\text{س}^٢ + ٥\text{س}\right]_{١}^{٢}$$

$$= \frac{٥}{٤} + \frac{٥}{٤} = \frac{٥}{٢} \text{ وحدة مساحة}$$

لإيجاد حجم الجسم الناتج من دوران Δ أ و جـ

$\text{ص} = \frac{-٣}{٢}\text{س} + ٣$

$\therefore \frac{-٣}{٢}\text{س} = \text{ص} - ٣$

$\text{س} = \frac{-٢}{٣}\text{ص} - ٣ \times \frac{-٢}{٣}$

$$\boxed{\text{س} = \frac{-٢}{٣}\text{ص} + ٢}$$

$$\text{ح} = \pi \int_{٠}^{٣} \text{س}^٢\, د\text{ص}$$

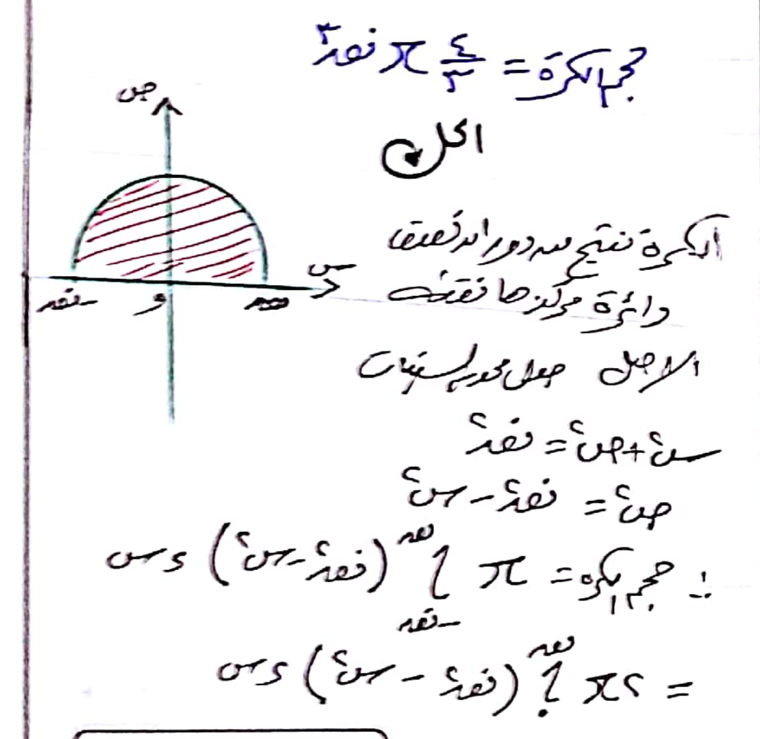
$$= \pi \int_{٠}^{٣} (\frac{-٢}{٣}\text{ص}+٢)^٢\, د\text{ص}$$

$$\pi\left[\frac{-٣}{٣\times٢}(\frac{-٢}{٣}\text{ص}+٢)^٣\right]_{٠}^{٣} = ٤\pi \text{ وحدة حجم}$$

٧) باستخدام التكامل اثبت أن

$$\text{حجم الكرة} = \frac{٤}{٣}\pi\,\text{نق}^٣$$

الحل



الكرة تنتج من دوران نصف دائرة مركزها نقطة الأصل حول محور السينات

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = \text{نق}^٢$

$\text{ص}^٢ = \text{نق}^٢ - \text{س}^٢$

$$\therefore \text{حجم الكرة} = \pi \int_{-\text{نق}}^{\text{نق}} (\text{نق}^٢ - \text{س}^٢)\, د\text{س}$$

$$= ٢\pi \int_{٠}^{\text{نق}} (\text{نق}^٢ - \text{س}^٢)\, د\text{س}$$

$$ح = ٢\pi \left[نق^٢ س - \frac{١}{٣} س^٣\right]_{.}^{نق}$$

$$٢\pi \left[نق^٣ - \frac{١}{٣} نق^٣\right]$$

$$٢\pi \times \frac{٢}{٣} نق^٣ = \frac{٤}{٣} \pi نق^٣ \text{ وحدة حجم}$$

---

٨ اثبت أن حجم الأسطوانة الدائرية القائمة $\pi نق^٢ ع$

الحل

الأسطوانة تنشأ من دوران مستطيل بعداه نق، ع حول محور الصادات

$س = نق$

$$الحجم = \pi \int_{.}^{ع} س^٢ \, ء ص$$

$$= \pi \int_{.}^{ع} نق^٢ \, ء ص$$

$$\pi \left[نق^٢ ص\right]_{.}^{ع}$$

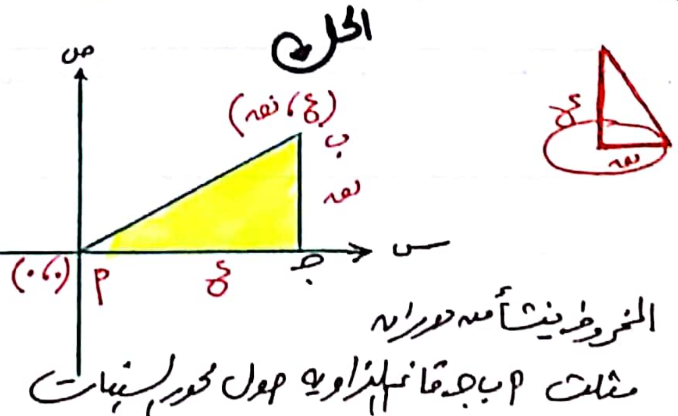
لاحظ أن نق ثابتة

$$ح = \pi نق^٢ ع \text{ وحدة حجم \#}$$

---

٩ اثبت أن حجم المخروط $\frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع$

الحل



المخروط ينشأ من دوران مثلث م ب جـ قائم الزاوية حول محور السينات

معادلة م ب هي

$$\frac{ص - ٠}{س - ٠} = \frac{نق - ٠}{ع - ٠}$$

$$\therefore \frac{ص}{س} = \frac{نق}{ع}$$

$$\therefore ص = س \left(\frac{نق}{ع}\right) \qquad \therefore ص^٢ = س^٢ \frac{نق^٢}{ع^٢}$$

$$ح = \pi \int_{.}^{ع} \frac{نق^٢}{ع^٢} س^٢ \, ء س$$

$$= \pi \times \frac{نق^٢}{ع^٢} \times \frac{١}{٣} \left[س^٣\right]_{.}^{ع}$$

$$\pi \times \frac{نق^٢}{ع^٢} \times \frac{١}{٣} ع^٣$$

$$= \frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع \text{ وحدة حجم \#}$$

---

١٠ إذا كان حجم الجسم الدوراني الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = س^٣$ والمستقيمين $س = ٠$ ، $ص = ١$ دورة كاملة حول محور السينات يعادل حجم سلك أسطواني الشكل طوله ٤٢ وحدة فما طول نصف قطر السلك

الحل

$ص_١ = ١$

$ص_٢ = س^٣$

$\because ص_١ > ص_٢$ في الفترة $[٠، ١]$

$$\therefore الحجم = \pi \int_{.}^{١} (ص_١^٢ - ص_٢^٢) \, ء س$$

$$= \pi \int_{.}^{١} (١ - س^٦) \, ء س$$

$$= \pi \left[س - \frac{١}{٧} س^٧\right]_{.}^{١} = \frac{٦}{٧} \pi \text{ وحدة حجم}$$

$$\text{حجم الأسطوانة} = \pi نق^٢ ع = \frac{٦}{٧} \pi \qquad \because ع = ٤٢$$

$$نق^٢ \times ٤٢ = \frac{٦}{٧} \qquad \therefore نق^٢ = \left(\frac{٦}{٧} \div ٤٢\right)$$

$$\therefore نق = \frac{١}{٧} \text{ وحدة طول}$$

اختر

(١١) عند دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى

$س = \frac{1}{\sqrt{ص}}$ ، $1 \le ص \le 4$

ومحور الصادات ، دورة كاملة حول محور الصادات فإن حجم الجسم الناشئ = ... وحدة مكعبة

(أ) $\frac{3}{4}\pi$ (ب) $3\sqrt{2}\pi$

(جـ) 2π لو$_هـ 2$ (د) $\frac{3}{4}\pi$ لو$_هـ 3$

التوضيح

$ح = \pi \int_1^4 س^2 \, دص$

حيث $س^2 = \frac{1}{ص}$

$\therefore ح = \pi \int_1^4 \frac{1}{ص} \, دص$

$= \pi \left[لو_هـ |ص| \right]_1^4$

$= \pi \left[لو_هـ 4 - لو_هـ 1 \right]$ (صفر)

$= \pi$ لو$_هـ 4$ $= \pi$ لو$_هـ 2^2$ $= 2\pi$ لو$_هـ 2$

(١٢) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين ص = ظاس ، ص = قاس والمستقيم $س = \frac{\pi}{6}$ ، $س = \frac{\pi}{4}$ دورة كاملة حول محور السينات = ... وحدة مكعبة

(أ) $\frac{\pi^2}{6}$ (ب) $\frac{\pi^2}{4}$

(جـ) $\frac{2\pi^2}{5}$ (د) $2\pi^2$

التوضيح

أشاهمل عادى ومن الآخر هنا مفيش قيمة مطلقة

$ح = \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (ص_1^2 - ص_2^2) \, دس$

فاكرانه قا^{2}س = ١ + ظا^{2}س

$\therefore$ قا^{2}س − ظا^{2}س = ١

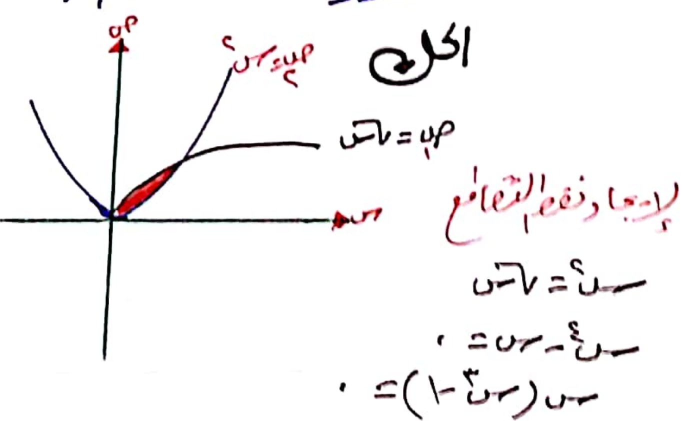
$ح = \left| \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1) \, دس \right|$

$\pi \left[س \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right]$

$= \frac{\pi^2}{12}$ وحدة مكعبة

(١٣) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين ص = ٨س ، ص = س^2 دورة كاملة حول محور السينات

الحل



س^2 = ٨س

س^2 − ٨س = ٠

س(س^3 − ١) = ٠

س = ٠ أو س = ١

وحيث أن $ص_1 > ص_2$

$\therefore$ ح $= \pi \int_{.}^{1} [ص_1^2 - ص_2^2]$ ءس

$= \pi \int_{.}^{1} (س - س^4)$ ءس

$= \pi [\frac{1}{2} س^2 - \frac{1}{5} س^5]_{.}^{1}$

$= \pi [\frac{1}{2} - \frac{1}{5}] = \frac{3}{10}\pi$ وحدة مكعبة

---

(١٤) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :

س ص = ٣ والمستقيمين ص = ١ ، ص = ٣ ومحور الصادات

(أ) حول محور الصادات

(ب) حول محور السينات

الحل

(أ) الدوران حول محور الصادات

س $= \frac{3}{ص}$

س $= 3ص^{-1}$

$س^2 = 9ص^{-2}$

ح $= \pi \int_{1}^{3} س^2$ ءص

$= \pi \int_{1}^{3} (9ص^{-2})$ ءص

$9\pi [\frac{ص^{-1}}{-1}]_{1}^{3} = 9\pi [\frac{-1}{3} + 1]$

$= 6\pi$ وحدة مكعبة

(ب) الدوران حول محور السينات [ركز فى دى]

نحل الدوران عندى جزئين

(١) بين المنحنى ومحور السينات (٢) بين المستقيم ص = ١ / ص = ٣

ص $= \frac{3}{س} = 3س^{-1}$

$\therefore$ ح = ح$_1$ + ح$_2$

$= \pi \int_{.}^{1} (3^2 - 1^2)$ ءس $+ \pi \int_{1}^{3} (9س^{-2} - 1^2)$ ءس

$= \pi [8س]_{.}^{1} + \pi [\frac{-9}{س} - س]_{1}^{3}$

$= 8\pi + \pi [(-3-3) - (-9-1)]$

$= 8\pi + 4\pi = 12\pi$ وحدة مكعبة

إنتهى بفضل الله وتوفيقه

منهج التفاضل والتكامل

تقبلوا تحياتى

م/ محمد أدهم

أ/ محمد أدهم
معلم رياضيات